Capítulo

$\boxed{6}$

El Universo Inflacionario

El modelo estándar del big-bang es sin duda, tremendamente exitoso en la medida en que incorpora aspectos importantes del universo que observamos. En primer lugar la expansión sistemática a gran escala, luego la existencia de la radiación cósmica de microondas y finalmente la síntesis de elementos ligeros. Provee así un marco para el estudio de la historia del universo desde $t \sim 10^{-2}$seg hasta hoy, $t \sim 15.10^{10}$años, y posiblemente tiempos anteriores. Sin embargo, no está libre de problemas, cabos sueltos y puntos que ameritan ser mejor entendidos. Pero fundamentalmente sugiere preguntas que el propio modelo no puede responder sino de manera demasiado artificial.

6.1 Problemas del Modelo Estándar

El problema del Horizonte

Consideremos un rayo de luz que viaja radialmente desde el evento (t, r) hasta nosotros, hoy, es decir hasta el evento $(t_0, 0)$. Como sobre la trayectoria del rayo $ds = 0$ (por describir una geodésica nula), entonces

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{6.1}$$

A medida que consideremos fotones emitidos hace más y más tiempo, $t \to 0$, tenemos dos posibilidades:

Que la integral de la derecha converja en el límite $t \to 0$. En ese caso obtenemos un "horizonte de partículas", es decir una frontera que delimita la parte del universo visible de la parte del universo que no podemos ver porque aún no nos llega su luz. En efecto, la distancia propia desde nosotros $(r = 0)$ hasta el horizonte $(r = r_H)$ es

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{g_{rr}}\,dr \tag{6.2}$$

Como $\sqrt{g_{rr}} = R(t)\left(1-kr^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, entonces la distancia al horizonte está dada por

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt}{R(t)} \tag{6.3}$$

Si por el contrario, la integral diverge, $d_H(t)$ es infinito y todo el universo está causalmente relacionado. Notemos que el hecho de que $d_H(t)$ sea finito o no depende del comportamiento del factor de escala $R(t)$ para $t \to 0$.

La existencia de horizontes en los modelos de Friedman plantea una seria objeción a las observaciones en que se apoya la cosmología estándar. En efecto, en el temprano universo, cuando la radiación dominaba la dinámica del universo, hemos visto que $R(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$, de modo que

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt}{R(t)} = 2t \tag{6.4}$$

mientras que el tamaño del universo era $S(t) = rR(t) = rt^{\frac{1}{2}}$. Por tanto, para tiempos pequeños, $d_H(t)$ decrece mucho más rápidamente y sólo una pequeña fracción del universo estaba en contacto causal. Por ejemplo, en el momento del último "scattering", es decir en la era del desacoplamiento entre la materia y la radiación $t \sim 10^{13} seg$, la región causalmente conectada ocupa hoy apenas $0,8$ grados en el cielo; es decir, que cuando detectamos radiación de fondo con una separación angular mayor, detectamos radiación que nunca estuvo en contacto causal. Un cálculo sencillo permite estimar que en el momento del desacoplamiento el universo observable contenía alrededor de 2.10^5 regiones causalmente desconectadas. La pregunta inmediata es: ¿Cómo explicar la asombrosa uniformidad en las propiedades de la radiación, si nunca tuvieron oportunidad de "termalizarse"?

El problema de la "Planitud"

Partamos de la ecuación de Friedman

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{6.5}$$

Recordando la definición de densidad crítica ρ_a, obtenemos

$$\rho - \rho_c = \frac{3k}{8\pi G}\frac{1}{R^2} \tag{6.6}$$

Como en un universo de radiación $\rho \sim R^{-4}$, concluimos que

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} \sim R^2 \tag{6.7}$$

pero $\dfrac{\rho - \rho_c}{\rho} = 1 - \Omega$ y $R \sim \sqrt{t}$, por consiguiente

$$|1 - \Omega| \propto t \tag{6.8}$$

Puesto que hoy Ω_0 está cercano a 1, y cambia con el tiempo como ilustra la ecuación 6.8, eso significa que cercano al big-bang tuvo que estar ajustado a la unidad con increible precisión, por ejemplo cuando $t = 1$

$$\left|1 - \Omega_{(1seg)}\right| \simeq 10^{-16}$$

En la época de Planck, $t \sim 10^{-43} seg$, $\left|1 - \Omega_{(t\,planck)}\right| \simeq 10^{-60}$. Los cosmólogos pretenden que este ajuste tan fino requiere una explicación que simplemente el modelo estándar no provee.

El problema de las Estructuras

En escalas menores que la distancia de Hubble, el universo dista de ser homogéneo y hay un contraste en la densidad a escalas galácticas, $\delta\rho/\rho \sim 10^6$. Para poder explicar tales inhomogeneidades se debe suponer que en el tiempo del desacoplamiento existían perturbaciones en la densidad de amplitud relativa 10^{-3} (que luego por inestabilidad de Jean originarían las actuales estructuras). La cosmología estándar no provee ningún atisbo de explicación respecto al origen ni la naturaleza de estas perturbaciones primordiales.

El problema del Monopolo

Transcurrido un lapso $t \sim 10^{-34} seg$ del big-bang la energía puede estimarse en unos $10^{34} GeV$ a una $T \sim 10^{27}\ {}^{\circ}K$, que corresponde a las energías en las cuales las teorías gran unificadas ($GUTs$) deben ser tenidas en cuenta. Una de las consecuencias del uso de las $GUTs$ en el temprano universo es que los modelos predicen transiciones de fase a medida que la expansión Enfríel universo. Como producto de estas transiciones se crean entre otros "defectos topológicos" los famosos monopolos magnéticos, con una masa de 10^{16} veces la masa del protón, cuya aparición es problemática para la cosmología estándar. En efecto, los cálculos detallados sugieren una densidad del universo de $10^{15}\rho_c$. Con esa densidad el universo colapsaría en un tiempo de 30.000 años apenas.

El Problema de la Constante Cosmológica

Como es bien sabido, la constante cosmológica fue introducida, y luego "abolida"por Einstein como una manera de obtener soluciones cosmológicas estáticas. Actualmente a la constante cosmológica se le atribuye un origen cuántico asociado con las fluctuaciones del vacío. En efecto, un vacío con una densidad de energía ρ_{vac} tendría asociado un tensor de energía-impulso $T_{ab} = \rho_{vac} g_{ab}$, que podemos interpretar como el tensor de energía-impulso de un fluido perfecto con ecuación de estado $p_{vac} = -\rho_{vac}$.

En la época de los GUTs, los efectos cuánticos habrían generado una constante cosmológica efectiva de alrededor de $10^{70} seg^{-2}$. El problema es porque la constante cosmológica es observacionalmente menor por un factor de 10^{120}, constituyendo uno de los desacuerdos entre teoría y observación más estruendosos en la historia de las ciencias.

Asimetría Materia-Antimateria

Este problema se refiere a la observación de que el universo observable está compuesto por materia y no por partes iguales de materia y antimateria. En otras palabras la relación número de fotones a número de bariones es del orden de 10^{10} y por tanto el universo tiene un número bariónico neto. ¿Puede explicarse este número (esencial para obtener las abundancias observadas de elementos ligeros en la nucleosíntesis primordial) a partir de una situación simétrica entre materia y antimateria?

Como observamos, la naturaleza general de estos problemas apunta en la dirección en la cual la cosmología estándar de Robertson-Walker tiene que suponer condiciones iniciales muy precisas para su funcionamiento. La alternativa es proponer mecanismos físicos que se encargarían de explicar los aspectos esenciales del universo actual, independientemente de las condiciones iniciales. En ese programa se inscribe el modelo inflacionario del universo propuesto por Guth en 1981. Como veremos el mecanismo de la inflación resuelve el problema de la planitud, el problema del horizonte y el problema del monopolo y sugiere posibilidades para el problema de la formación de estructuras. El problema de la asimetría materia-antimateria es vislumbrado en algunas teorías gran unificadas y la incipiente cosmología cuántica ha arrojado alguna luz sobre el problema de la constante cosmológica.

6.2 El Mecanismo de la Inflación

Veremos a continuación en qué consiste el modelo inflacionario del universo y cómo resuelve algunos de los problemas de la cosmología de Robertson-Walker.

La idea fundamental es que hubo una época en el temprano universo cuando a una temperatura crítica T_c ocurrió una transición de fase que hizo que la densidad de energía del vacío (constante) dominara la densidad de energía del universo. Durante este lapso el crecimiento del factor de escala es exponencial, $R(t) \sim e^{\lambda t}$, permitiendo que una pequeña región conectada causalmente creciera hasta alcanzar un tamaño que luego de retornar al régimen de crecimiento de la cosmología usual, resultaría en nuestro presente universo observable.

Para lograr tal comportamiento se supone la existencia de un campo escalar ϕ que los físicos de partículas asocian con el *campo de Higgs,* acoplado a la gravitación a través de las ecuaciones de Einstein.

Dinámica del Campo Escalar

Supongamos que el campo ϕ está descrito por una densidad lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} g^{ab} \phi_{,a} \phi_{,b} + V(\phi) \tag{6.9}$$

El tensor de energía-impulso del campo ϕ se define como es usual, en términos de la derivada funcional respecto de la métrica:

$$T^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} L)}{\delta g_{ab}} \tag{6.10}$$

donde $\frac{\delta}{\delta g_{ab}}$ es el operador de Euler-Lagrange para la métrica:

$$\frac{\delta}{\delta g_{ab}} \equiv \frac{\partial}{\partial g_{ab}} - \partial_c \left(\frac{\partial}{\partial g_{ab,c}} \right) \tag{6.11}$$

Un cálculo sencillo permite obtener a partir de 6.9 y 6.10, el tensor de energía-impulso del campo escalar como

$$T^{ab} = g^{am} g^{bn} \phi_{,m} \phi_{,n} - g^{ab} \left(\frac{1}{2} g^{mn} \phi_{,m} \phi_{,n} + V(\phi) \right) \tag{6.12}$$

En lo sucesivo supondremos que $\phi_{,a}$ es un cuadrivector tipo tiempo, $g^{ab}\phi_{,a}\phi_{,b} < 0$ y por tanto $u_a = -\phi_{,a}(-g^{bc}\phi_{,b}\phi_{,c})^{-\frac{1}{2}}$.

Escribamos el tensor de energía-impulso del campo escalar, ecuación 6.12, en la forma del tensor de energía-impulso de un fluido:

$$T^{ab} = \rho_\phi u^a u^b + p_\phi h^{ab} \tag{6.13}$$

donde ρ_ϕ y p_ϕ son la densidad de energía y la presión isótropa propias del campo ϕ. Recordando que el tensor de proyección en el subespacio ortogonal a u^a es $h^{ab} = u^a u^b + g^{ab}$, reescribimos 6.13 de la manera usual

$$T^{ab} = (\rho_\phi + p_\phi) u^a u^b + p_\phi g^{ab} \tag{6.14}$$

El cambio temporal del campo a lo largo de la línea de mundo está definido como $\dot{\phi} = u^a \phi_{,a}$, con lo que vemos que ρ_ϕ y p_ϕ deben estar definidos como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_{(\phi)} \tag{6.15}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_{(\phi)} \tag{6.16}$$

Ecuación de Movimiento para ϕ
Si el campo escalar ϕ está acoplado a la gravitación vía su tensor de energía-impulso, y no hay otra fuente para las ecuaciones de Einstein, entonces sabemos que el campo ϕ debe satisfacer las ecuaciones de movimiento:

$$T^{ab}_{\ ;b} = 0 \tag{6.17}$$

Para un fluido general, sabemos que estas ecuaciones corresponden a las siguientes:

$$\dot{\rho} = -\Theta\,(\rho + p) \tag{6.18}$$

$$(\rho + p)\,\dot{u}^a = -h^{ab} p_{,b} \tag{6.19}$$

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}^a_{,b} + 4\pi G\,(\rho + 3p) = 0 \tag{6.20}$$

La primera expresa el cambio en la densidad de energía debido a la expansión, la segunda, es la ecuación de Euler. En nuestro caso, hemos visto que la homogeneidad prohíbe que existan gradientes espaciales de presión, capaces de producir fuerzas hidrodinámicas, y por tanto $\dot{u}^a = 0$. La tercera es la ecuación de Raychaudhuri (hemos usado que $\sigma = \omega = 0$, para la métrica de Robertson-Walker).
Veamos qué dicen estas ecuaciones cuando ρ y p corresponden al campo escalar ϕ. En ese caso la ecuación de estado es 6.15, 6.16, y consideraremos los siguientes casos límites:

- Si el término cinético domina sobre el potencial $\dot{\phi}^2 >> \left|V_{(\phi)}\right|$. En ese caso la ecuación de estado que vincula la densidad de energía con la presión es

  $$p_\phi = \rho_\phi \tag{6.21}$$

  que corresponde a la ecuación de estado rígida (pues la velocidad del sonido es igual a la velocidad de la luz).

- Si el potencial domina sobre el término cinético, $\left|V_{(\phi)}\right| >> \dot{\phi}^2$. En cuyo caso la ecuación de estado es $p_\phi = -\rho_\phi$.

Notemos que en este segundo caso límite el tensor de energía-impulso resulta

$$T^{ab} = -\rho_\phi g^{ab} \tag{6.22}$$

Puesto que $T^{ab}_{\ ;b} = 0$ y $g^{ab}_{\ ;b} \equiv 0$ entonces $\rho_\phi =$ constante, de tal forma que el término T^{ab} en las ecuaciones de Einstein hace las veces de término cosmológico $\Lambda = \rho_\phi / 8\pi G$. Como veremos, este término es el encargado de producir una expansión acelerada en el temprano universo.

Volvamos a la dinámica del campo ϕ y sustituyamos las ecuaciones 6.18 y 6.19 en la ecuación de la energía $\dot{\rho}_\phi = -\Theta(\rho_\phi + p_\phi)$:

$$\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} \tag{6.23}$$

y

$$\Theta(\rho_\phi + p_\phi) = \Theta\ \dot{\phi}^2$$

y por consiguiente

$$\ddot{\phi} + \Theta\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{6.24}$$

En el caso de Robertson-Walker, $\Theta = \frac{3\dot{R}}{R}$, de modo que la ecuación de evolución para el campo resulta ser

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \tag{6.25}$$

Idea de la Inflación

La idea fundamental de la inflación es suponer que para $10^{-35}seg < t < 10^{-31}seg$, la forma del potencial es plana, con un mínimo acentuado para $\phi = \sigma$. En la primera fase, denominada fase de rodamiento lento, el término cinético puede ser despreciado y por tanto la ecuación de estado es $p_\phi = -\rho_\phi = -V_{(0)}$. Donde $V_{(0)}$ es el valor constante que asume el potencial durante toda esta fase. Las ecuaciones para el factor de escala

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = 8\pi G\rho_\phi \tag{6.26}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi G p_\phi \tag{6.27}$$

Restando una ecuación de la otra y usando que $\rho_\phi + p_\phi = 0$, obtenemos

$$2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{\cdot} = 0 \tag{6.28}$$

es decir, el parámetro de Hubble es constante. De 6.26 podemos integrar y obtener

$$R(t) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V_{(0)}}t\right) \tag{6.29}$$

Modelos con expansión exponencial de este tipo reciben el nombre de Modelos de de-Sitter. Note que (salvo $8\pi G$), el valor $V_{(0)}$ actúa como una constante cosmológica efectiva. Es interesante ver cómo es posible que se produzca una aceleración del factor de escala (de hecho el parámetro de desaceleración es negativo, $q = 1$) como si la materia estuviese "antigravitando". La respuesta es que la condición $\rho + 3p \geq 0$ que es una de las condiciones de energía que debe satisfacer el tensor de energía-impulso de los campos físicos, para que la gravedad actúe atractivamente, es violada por la ecuación de estado del campo escalar, que permite que $-\rho \leq p \leq \rho$.

Una expresión conveniente para $V_{(\phi)}$ es el potencial de Coleman-Weinberg usado cuando hay ruptura de simetría por correcciones radioactivas. Esencialmente

$$V_{(\phi)} \sim \phi^4 \log\left(\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma^4 - \phi^4\right) \tag{6.30}$$

De la ecuación para la evolución de ϕ puede verse que (para $Ht << 1$)

$$\phi^2(t) = -\frac{3H}{2\lambda(\beta - t)} \tag{6.31}$$

donde λ y β son constantes. Una vez que el campo ha evolucionado, abandonamos la fase plana y entramos en la zona del potencial en la cual $\dot{\phi}^2 >> V_{(\phi)}$, donde el campo escalar oscila alrededor del verdadero vacío σ y la energía del campo se transfiere a la radiación.

6.3 Resolución de los Problemas de la Cosmología Estándar

- *El problema del Horizonte*

En el instante del comienzo del período inflacionario $t_i \sim 10^{-35} seg$, el tamaño del horizonte era $d_H(t_i) \simeq 10^{-25} cm$ Debido al crecimiento exponencial, el final del período inflacionario $t_f \sim 10^{-31}$, el factor de escala es $R(t_f) \sim 10^{29} R(t_i)$ (para algún valor del potencial), de modo que la distancia del horizonte al final es $d_H(t_f) \sim 10^4 cm$, que basta para cubrir todo el universo observable en ese entonces. De tal forma que todas las regiones que observamos hoy, estuvieron conectadas causalmente.

- *Problema de la "Planitud"*

El problema de por qué observamos un universo con sección espacial tan plana lo resuelve la inflación notando que en la ecuación de Friedmann

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}^2\right) = 8\pi G\rho - \frac{3k}{R^2}$$

en tanto que ρ permaneció aproximadamente constante durante la fase inflacionaria R aumentó en 29 órdenes de magnitud, y por tanto la curvatura k/R^2 se redujo en 58 órdenes. Hablando sin mucha precisión, la esfera de Hubble correspondiente al universo observable sería apenas una fracción diminuta del universo, y por tanto, prácticamente plano. Al finalizar la inflación $|\Omega(t_f) - 1| \sim \sigma(10^{-58})$ y por tanto hoy $|\Omega_0 - 1| \sim \sigma(10^{-6})$.

- *Problema del Monopolo y otros vestigios indeseados*

Finalmente, los monopolos formados antes de la inflación, fueron dispersados por el crecimiento de R, a una densidad tan baja que los haría indetectables.