Capítulo

$\boxed{5}$

Dinámica de los Modelos Cosmológicos

La discusión precedente se apoya en la "cinemática" de los modelos de Robertson-Walker. En este capítulo veremos cómo el comportamiento del factor de escala $R(t)$ está gobernado por las ecuaciones dinámicas de Einstein, dependiendo del contenido material que supongamos.

Relatividad General en Breve

La descripción local del contenido de materia en relatividad, se lleva a cabo mediante el tensor de energía-impulso T_{ab}, que sirve de fuente a las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G T_{ab} \tag{5.1}$$

donde como antes, R_{ab} es el tensor de Ricci y R es la curvatura escalar del espaciotiempo con métrica g_{ab}. Las identidades de Bianchi obligan a que el tensor de energía-impulso satisfaga las ecuaciones de balance

$$T^{ab}_{\ \ ;b} = 0 \tag{5.2}$$

Veremos qué consecuencias tienen estas ecuaciones, primero en una métrica general y luego para la métrica de Robertson-Walker. Supondremos que T^{ab} corresponde a un fluido perfecto con densidad y presión propia denotada por ρ y p respectivamente, es decir

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + p h^{ab}$$

Usando esta expresión, la ecuación 5.2 se convierte en:

$$\rho_{,b} u^a u^b + \rho \left(u^a_{;\,b} \right) + p_{,b} h^{ab} + p \left(g^{ab} + u^a u^b_{;\,b} \right) = 0$$

recordando las expresiones para la aceleración y la expansión del fluido, reescribimos esta ecuación como

$$\dot{\rho} u^a + (\rho + p)\,\Theta u^a + (\rho + p)\,\dot{u}^a + p_{,b} h^{ab} = 0$$

Proyectando esta relación en la dirección u^a (es decir $u_a T^{ab}_{;\,b} = 0$) encontramos la ecuación de balance de la energía:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\,\Theta = 0 \tag{5.3}$$

Similarmente, proyectando ahora sobre la hipersuperficie espacial ${h_a}^m T^{ab}_{;b} = 0$, resulta

$$(\rho + p)\dot{u}^m = -h^{mb} p_{,b} \tag{5.4}$$

que es la ecuación de balance del momentum.

Definamos ahora el vector densidad de número de partículas, como

$$N^a = nu^a \tag{5.5}$$

donde $n = N^a u_a$ es la densidad de número de partículas. Si el número de partículas se conserva entonces $N^a{}_{;a} = 0$, es decir

$$\dot{n} + \Theta n = 0 \tag{5.6}$$

Volvamos ahora a la métrica de Robertson-Walker. Respecto de un observador fundamental con coordenadas comóviles, es claro que la componente $N^0 = n$ es un escalar al igual que T^{00}. Las componentes N^α y T^{α_0} son trivectores y $T^{\alpha\beta}$ es un 3-tensor de segundo rango. Como hemos visto, en un espacio máximamente simétrico los escalares no dependen de x^α, los vectores nulos y los tensores de segundo rango proporcionales a la tri-métrica, por tanto,

$$\begin{array}{rcr} N^0 = n\,(t) & \text{es decir} & \partial_\alpha n \; = 0 \\ N^\alpha = T^{\alpha 0} = 0 & \text{es decir} & \partial_\alpha \rho = 0 \\ T_{\alpha\beta} = p\,(t)\, h_{\alpha\beta} & \text{es decir} & \partial_\alpha p \; = 0 \end{array}$$

en otras palabras, la densidad de número, la densidad de energía y la presión no pueden depender de las variables espaciales, sino únicamente de t. Observe que de la ecuación 5.4 concluimos que $\dot{u}^m = 0$, es decir las curvas integrales de u^a son geodésicas de Robertson-Walker, como debe ser.

Ecuación de Raychaudhuri

Con los elementos que tenemos a mano podemos obtener una ecuación que gobierna la evolución temporal de la expansión. Tal ecuación recibe el nombre de ecuación de *Raychaudhuri* y está dada por

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - \dot{u}^a_{;\,a} + 4\pi G\,(\rho + 3p) = 0 \tag{5.7}$$

Derivemos a continuación la ecuación de Raychaudhari. Comencemos por la definición del tensor de Riemann

$$u^a_{;\,bc} - u^a_{;\,cb} = R^a_{ncb} u^n$$

contrayendo a y b y proyectando en la dirección de u^c :

$$(u^a_{;\,ac} - u^a_{;\,ca}) u^c = -R_{nc} u^n u^c \tag{5.8}$$

donde usamos la definición del tensor de Ricci $R_{nc} \equiv -R^a{}_{nca}$. Notemos que el primer término a la izquierda es la densidad temporal de la expansión $u^a{}_{;\,ac} u^c = \dot{\Theta}$ Consideremos el segundo término a la izquierda:

$$\begin{aligned} u^a_{;\,ba} u^b &\equiv (u^a_{;\,b} u^b)_{;\,a} - u^a{}_{;\,b} u^b{}_{;\,a} \\ &= \dot{u}^a{}_{;\,a} - g^{am} g^{bn} u_{m;\,b} u_{n;\,a} \end{aligned}$$

recordando la expresión para la derivada de la cuadrivelocidad ecuación (4.13), tomando en cuenta que $\omega^{an} u_a = \sigma^{an} u_a = h^{an} u_a = 0$ y que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico es nulo, obtenemos

$$u^a_{;\,ba} u^b = \dot{u}^a_{;\,a} - \omega^{an}\omega_{an} - \sigma^{an}\sigma_{nc} - \frac{1}{3}\Theta h^{an} \frac{1}{3}\Theta h_{na}$$

usando la antisimetría de ω, que la traza de h, $h_{an}h^{an} = 3$ y recordando las definiciones de ω y σ, podemos reescribir el lado izquierdo de 5.8 como

$$\left(u^a_{\ ;ab} - u^a_{\ ;ba}\right) u^b = \dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\left(\sigma^2 - \omega^2\right) - \dot{u}^a_{\ ;a} \tag{5.9}$$

Consideremos el lado derecho escribiendo las ecuaciones de Einstein

$$R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R = 8\pi G T^{ab} \tag{5.10}$$

y tomando la traza, obteniendo

$$-R = 8\pi G\ T$$

donde $T \equiv T^a_{\ a}$ es la traza del tensor de energía-impulso. Reinsertando esta ecuación en las ecuaciones de Einstein, ellas se pueden reescribir como

$$R_{ab} = 8\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T\right) \tag{5.11}$$

Si suponemos para T_{ab} la forma de un fluido perfecto

$$T_{ab} = \rho u_a u_c + p h_{ab}\ ; \qquad T = 3p - \rho$$

entonces:

$$R_{nc}u^n u^c = 4\pi G(\rho + 3p)$$

Combinando este resultado con 5.9 y sustituyendo en 5.8, obtenemos finalmente

$$\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - \dot{u}^a_{\ ;a} + 4\pi G(\rho + 3p) = 0$$

En un universo de Robertson-Walker hemos visto que $\dot{u}^a = \sigma = \omega = 0$, de modo que la ecuación de Raychaudhuri resulta

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 4\pi G(\rho + 3p) = 0 \tag{5.12}$$

5.1 Modelos de Friedmann

En lo que sigue, explotaremos las consecuencias de las ecuaciones de Einstein explícitamente. La idea es considerar las ecuaciones

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G T_{ab}$$

para la métrica de Robertson-Walker. Un cálculo sencillo permite obtener los componentes del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{R}}{R} \\
R_{0i} &= 0 \\
R_{\alpha\beta} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k\right) h_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

El contenido material está representado por un tensor de energía-impulso con la forma de un fluido perfecto

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab} \qquad \text{con} \qquad u^a = \delta^a_0$$

Con estos elementos a mano, construimos las ecuaciones de Einstein no triviales: (para a y $b = 0, 0$ y $1, 2$) son

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{5.13}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \tag{5.14}$$

La ecuación 5.13 es conocida como ecuación de Friedmann. De la ley de balance $T^{ab}{}_{;b} = 0$ obtenemos para $a = 0$

$$R^3\frac{dp}{dt} - \frac{d}{dt}\left[R^3(\rho + p)\right] = 0 \tag{5.15}$$

Esta ecuación no es independiente de las ecuaciones de campo 5.13 y 5.14 y nos permite prescindir de esta última. Por otra parte, dada una ecuación de estado, es decir una relación entre ρ y p, junto con 5.13 obtenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas ρ y $R(t)$. De las ecuaciones de campo podemos eliminar $\dot{R}^2$ y obtener

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{5.16}$$

Si el término $\rho + 3p \geq 0$ como suele suceder para la materia ordinaria, entonces la aceleración del factor de escala es negativa. Como $\dot{R} \geq 0$ (observamos expansión, no contracción) significa que la curva R vs. t es cóncava hacia abajo, y por tanto debe existir un t finito para el cual $R(t) = 0$. Este tiempo lo elegiremos como $t = 0$, y por tanto $R(0) = 0$. Como $R(t)$ escala las distancias, todo par de puntos separados por una distancia coordenada finita hoy, estaban "juntos" en $t = 0$. Por ello se asocia $t = 0$ con la "creación del universo". Observemos que el inverso del parámetro de Hubble, ${H_0}^{-1}$ da una cota máxima para la edad del universo: si no hubiese materia gravitante y por tanto no hubiese aceleración del factor de escala, $\ddot{R} = 0$, entonces $R(t) = \dfrac{t}{t_0}R(t_0)$. Derivando $\dfrac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = \dfrac{1}{t_0} = {H_0}^{-1}$. En realidad como $\ddot{R} \leq 0$, $\quad t_0 \leq {H_0}^{-1}$.

5.2 Análisis Cualitativo

Escribamos la ecuación de conservación de la energía 5.15 como

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = -3pR^2 \tag{5.17}$$

Si p es no negativo, ρ debe decrecer al menos como R^{-3}. De la ecuación de Friedmann $\dot{R}^2 + k = \dfrac{8\pi G}{3}\rho R^2$ podemos ver que si

- $k=-1, \quad k=0$ $\quad \dot{R}^2$ siempre será positivo, luego $R\,(t)$ crecerá todo el tiempo.
- $k=+1,$ $\quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - 1$, de modo que en algún instante $\dot{R}=0$, es decir, la expansión se detendrá. Como $\ddot{R} \leq 0, \quad R\,(t)$ comenzará a decrecer y alcanzará el valor $R=0$ en un tiempo finito en el futuro. De modo que la evolución futura del universo dependerá de la geometría de su sección espacial.

Densidad y Presión Hoy
Evaluemos las ecuaciones de campo 5.13 y 5.14 en el tiempo presente, $t=t_0$:

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{k}{{R_0}^2} + {H_0}^2\right) \tag{5.18}$$

$$-8\pi G p_0 = \frac{k}{{R_0}^2} + {H_0}^2\left(1-2q_0\right) \tag{5.19}$$

De 5.18 es claro que k es positivo, nulo o negativo, dependiendo de que ρ_0 sea mayor, igual o menor respectivamente que una densidad crítica definida.

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3{H_0}^2}{8\pi G} \tag{5.20}$$

Es usual definir el parámetro adimensional $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_{crit}$. Si $\Omega_0 > 1,\ k=1$ y la geometría espacial es esférica. Si $\Omega < 1,\ k=-1$ y la geometría espacial es hiperbólica. Finalmente $\Omega_0 = 1$ significa que las secciones espaciales son euclideanas.

5.3 Universo Dominado por la Materia

Las estimaciones de las densidades de materia y de radiación actualmente sugieren que $(\rho_{mat}/\rho_{rad})_0 \simeq 10^3$, es decir que la dinámica del universo estaría dominado por la materia. Además es sugestivo considerar como buena aproximación, el caso $p=0$ (polvo). Las ecuaciones de Einstein resultan

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \tag{5.21}$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G\rho R^2 \tag{5.22}$$

mientras que la identidad de Bianchi se reduce a

$$\frac{d}{dt}\left(\rho R^3\right) = 0 \tag{5.23}$$

Esta última ecuación se integra obteniendo

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \tag{5.24}$$

Sustituyendo en la ecuación de Friedmann, resulta

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{{R_0}^3}{R^2} \tag{5.25}$$

Por otra parte, evaluaremos las ecuaciones 5.21 y 5.22 en el instante actual t_0, después de dividir por ${R_0}^2$ y hacer algunos cambios, obtenemos

$$\frac{k}{{R_0}^2} = {H_0}^2 \left(2q_0 - 1\right) \tag{5.26}$$

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_0 = 2q_0 {H_0}^2 \tag{5.27}$$

Estas relaciones vinculan los diversos parámetros observacionales para el caso de un universo dominado por la materia. En particular note que el universo es de sección espacial esférica, euclídea o hiperbólica, dependiendo si q_0 es mayor, igual o menor que $1/2$, respectivamente; (es decir, note que para este caso $2q_0 = \Omega_0$.)
Volvamos a la ecuación 5.25, dividámosla por ${R_0}^2$ y usemos 5.26 y 5.27 para ponerla en la forma

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = \left(1 - 2q_0\right){H_0}^2 + 2q_0 {H_0}^2 \frac{R_0}{R}$$

definiendo una variable adimensional $x = R_0/R$, despejando dt e integrando, obtenemos:

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx \tag{5.28}$$

donde hemos colocado $t = 0$ si $R \ll R_0$. La edad del universo puede expresarse entonces como

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{1} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx \tag{5.29}$$

es decir:

$$R\left(t\right) = \frac{q_0}{1 - 2q_0} R_0 \left(\cos\Theta - 1\right) \tag{5.30}$$

Observemos que si el universo no se desacelerase (si no existiera gravitación!!) $q = 0$ y $t = 1/H_0$ pero si $q_0 > 0 \Longrightarrow t_0 < 1/H_0$. Apliquemos el resultado obtenido a varios casos particulares.
a.- $q_0 > \frac{1}{2}$ (es decir $k = +1$).
Definiendo Θ a través de la relación

$$1 - \cos\Theta \equiv \frac{2q_0 - 1}{q_0}\left(\frac{R\left(t\right)}{R_0}\right)$$

entonces podemos resolver la integral 5.28, resultando

$$H_0 t = q_0 \left(2q_0 - 1\right)^{-3/2}\left(\Theta - \sin\Theta\right) \tag{5.31}$$

Las ecuaciones 5.31 y 5.30 son la forma paramétrica de un cicloide en el plano $R - t$. El factor de escala crece desde $R = 0$ en $t = 0$, hasta un máximo cuando $\Theta = \pi$, es decir, $R_{\max} = \frac{2q_0}{2q_0 - 1} R_0$

cuando $t_{\max} = \frac{\pi q_0}{H_0(2q_0-1)^{3/2}}$, retornando a cero de manera simétrica. La edad del universo en este modelo resulta

$$t_0 = \frac{q_0}{H_0}\left(2q_0 - 1\right)^{-3/2}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{q_0} - 1\right) - \frac{1}{q_0}\left(2q_0 - 1\right)^{1/2}\right] \tag{5.32}$$

Por ejemplo, si $q_0 = 1$ y $H_0^{-1} = 13.10^9$ años entonces

$$t_0 \approx \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) H_0^{-1} \ \text{ y } \ \mathrm{t_{max}} = \pi \mathrm{H_0^{-1}} = 40.10^9 \ \text{ años.}$$

El radio máximo es $R_{\max} = 2R_0$.
b.- $q_0 = \frac{1}{2}$ (es decir $k = 0$.)
Este caso es conocido con el nombre de universo de Einstein-de Sitter y es uno de los más usados por su simplicidad y ajuste con los datos observacionales.
Si $q_0 = \frac{1}{2}$, la integral 5.28 resulta

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left(0 + \frac{1}{x}\right)^{-1/2} dx$$

y resolviendo, obtenemos

$$R\left(t\right) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} R_0 \tag{5.33}$$

Es decir R aumenta indefinidamente desde cero, como $t^{2/3}$. La edad resultante para el universo es $t_0 = \frac{2}{3}\ H_0^{-1}$.
c.- $0 < q_0 < \frac{1}{2}$ (es decir $k = -1$). El tratamiento aquí es similar al del caso a, pero con $\Theta = i\Psi$, resultando un cicloide imaginario, es decir:

$$H_0 t = q_0\left(1 - 2q_0\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\sinh\Psi - \Psi\right) \tag{5.34}$$

$$R\left(t\right) = \frac{q_0}{1 - 2q_0} R_0\left(\cosh\Psi - 1\right) \tag{5.35}$$

Puede verse de aquí que $R\left(t\right)$ aumenta ilimitadamente para $t \to \infty$. Asintóticamente $t \to \infty \Rightarrow \Psi \to \infty$, o sea que $H_0 t \sim q_0\left(1 - 2q_0\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{e^{\Psi}}{2}$ y $R\left(t\right) \sim \frac{q_0}{\left(1 - 2q_0\right)} R_0 \frac{e^{\Psi}}{2}$, y por tanto

$$R\left(t\right) = \left(1 - 2q_0\right) H_0 t \tag{5.36}$$

5.4 Modelos Dominados por la Radiación

Actualmente la densidad de energía de la materia sobrepasa a la de la radiación por un factor de 1000. Sin embargo no siempre fue así. Hemos visto en la sección anterior que $\rho_{mat} \sim R^{-3}$ y veremos a continuación que $\rho_{rad} \sim R^{-4}$ de modo que para R pequeños ρ_{rad} crece más rápidamente que ρ_{mat} y por tanto, en fases tempranas en la evolución del universo la radiación era la encargada de gobernar la expansión, hasta la época en la cual $\rho_{mat} \sim \rho_{rad}$, llamada época de la recombinación, en la cual se desacopló la interacción entre los recién formados átomos y la radiación electromagnética.

Comencemos con las ecuaciones de Einstein y la ley de conservación; 5.13, 5.14 y 5.15

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{5.37}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \tag{5.38}$$

$$R^3 \frac{dp}{dt} - \frac{d}{dt}\left[R^3\left(\rho + p\right)\right] = 0 \tag{5.39}$$

Sabemos que la ecuación de estado que relaciona a la presión y a la densidad de radiación es $p_r = \frac{1}{3}\rho$; de tal forma que la ecuación 5.39 puede integrarse para obtener $\rho_r \sim R\left(t\right)^{-4}$, es decir

$$\rho_r\left(t\right) = \left(\frac{R\left(t\right)}{R_0}\right)^{-4} \rho_0 \tag{5.40}$$

La dependencia de la densidad de energía de la radiación como R^{-4} es fácilmente entendible en términos físicos. En primer lugar hay un factor R^{-3} como en toda densidad, pero además la energía de cada fotón disminuye por otro factor R^{-1} por el corrimiento al rojo. Si recordamos la ley de Stefan-Boltzman $\rho_{rad} = \sigma T^4$, donde α es una constante, obtenemos el importante resultado $T \sim R^{-1}$ es decir,

$$\frac{T\left(t\right)}{T_0} = \left(\frac{R\left(t\right)}{R_0}\right)^{-1} \tag{5.41}$$

donde naturalmente T_0 denota la temperatura hoy, en el instante t_0. El resultado 5.41 ilustra la manera cómo la temperatura de la radiación se va enfriando a medida que el universo se expande y el factor de escala aumenta. Como sabemos, hoy la radiación se ha corrido al rojo hasta el régimen de las microondas y ha sido medido con exquisita precisión; su temperatura es de $T_0 = 2,726 \pm 0,10°K$ y su espectro corresponde perfectamente al de la radiación de un cuerpo negro, lo que indica su estado de equilibrio con la materia presente. Como conocemos la energía a la cual se ioniza un átomo de hidrógeno (es decir la temperatura del ambiente en la cual no pueden existir los átomos constituidos), conocemos la relación $\frac{T_{(ion)}}{T_0}$ y por tanto conocemos la relación entre los factores de escala. Esto permite estimar el tiempo en el cual el universo era lo suficientemente frío como para que se formara el hidrógeno. Esta es la lógica del estudio de la física en el temprano universo. El cálculo sugiere que esta “superficie de última dispersión” ocurrió cuando el universo tenía unos 100.000 años de edad.

Es posible siguiendo un paralelo con el procedimiento usado en el caso de materia, obtener una relación general entre R y t en término de los parámetros observacionales q_0 y H_0. El resultado análogo a la ecuación 5.28 es,

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{R}{R_0}} \left(1 - q_0 + \frac{q_0}{x^2}\right) dx \tag{5.42}$$

Pudiéramos hallar soluciones explícitas a esta ecuación, hallando comportamientos cualitativos similares a los de materia, pero más interesante es, argumentando que la radiación jugó un papel sólo en las primeras fases, considerar el comportamiento de los modelos para instantes cercanos a $t = 0$.

Aproximación cuando $t \sim 0$

Escribamos la ecuación de Friedmann como

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r R^2 - k \tag{5.43}$$

Como $\rho_r \sim R^{-4}$, el primer término a mano derecha va como R^{-2} ; de modo que para R pequeños el resultado puede prescindir del valor de k :

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0^4}{R^2(t)} \tag{5.44}$$

y esta ecuación se integra fácilmente para obtener

$$R(t) = \left(\frac{32\pi G}{3}\rho_0\right)^{\frac{1}{4}} R_0 t^{\frac{1}{2}} \tag{5.45}$$

En otras palabras, en todos los modelos de universo dominados por la radiación, el factor de escala crece como $t^{\frac{1}{2}}$. Un desarrollo del factor de escala para todo t, requiere hallar una solución para radiación, otra para materia y acoplarlos en la época en la cual las densidades de energía de la materia y la radiación son iguales.