



POSTGRADO EN FÍSICA FUNDAMENTAL

Ecuaciones de Estado no Locales en Relatividad General

Héctor Hernández G.

Laboratorio de Física Teórica, Departamento de Física,
Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes,
Mérida 5101, Venezuela

y

Centro Nacional de Cálculo Científico (CeCalCULA)
Universidad de Los Andes,
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela

Mérida - Venezuela

Ecuaciones de Estado no Locales en Relatividad General

Trabajo presentado por el profesor Héctor Hernández G.
para optar al grado de Doctor en Física Fundamental.

Tesis dirigida por el Dr. Luis A. Núñez.

Mérida, noviembre de 2009

Para haber luchado tanto por salir de este planeta, me está costando mucho dejarlo.
Aunque dicen que cada molécula de nuestro cuerpo perteneció alguna vez a una estrella.
Quizá no me esté yendo. Quizá esté volviendo a casa.

De la película *Gattaca* (1997)

César Augusto Mendoza-Briceño
In Memoriam, 1962-2008.

RESUMEN

En este trabajo se muestra que es posible obtener modelos físicamente aceptables para configuraciones de materia ultradensa, con simetría esférica, los cuales satisfacen una ecuación de estado no local. Este tipo particular de ecuación de estado relaciona la presión radial en un punto dado con algunas de las otras variables físicas a través de un funcional dentro de un determinado volumen.

La plausibilidad física de los modelos considerados se comprueba estudiando las condiciones de energía, las condiciones de aceptabilidad física y la posibilidad de acoplar de manera continua las soluciones obtenidas con las soluciones exteriores.

Se construyen soluciones y familias de soluciones no locales, estáticas y para fluido no perfectos, a partir de soluciones conocidas de las ecuaciones de Einstein, o agregando alguna condición adicional como la de fluido conformemente plano. Se desarrolla un método para estudiar la factibilidad de incorporar soluciones numéricas obtenidas de la teoría lagrangiana de campos para estrellas de neutrones y generar soluciones no locales.

Se establece un criterio para estudiar la estabilidad de configuraciones de materia y la posible aparición de fracturas a partir de una relación que involucra únicamente las velocidades del sonido radial y tangencial.

Se construyen dos modelos analíticos de colapso gravitacional y se establecen algunas comparaciones con modelos equivalentes utilizando el algoritmo semi-numérico HJR. También se consideran soluciones con la condición para fluidos que aceptan Vectores de Killing Conformes.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Ecuaciones de la Relatividad General | 9 |
| 2.1. Ecuaciones básicas | 9 |
| 2.2. Cinemática de un medio material | 12 |
| 2.3. Descripción de la materia | 14 |
| 2.4. Condiciones de acoplamiento | 16 |
| 2.5. Aceptabilidad física y condiciones de energía | 20 |
| 2.6. Simetrías en Relatividad General | 21 |
| 2.6.1. Simetrías conformes | 23 |
| 3. Ecuaciones de estado para materia ultradensa | 25 |
| 3.1. El método de la mecánica estadística | 26 |
| 3.2. El método de la teoría de campos | 28 |
| 3.2.1. El modelo $\sigma - \omega - \rho$ en la aproximación del campo-medio relativista | 28 |
| 3.3. Un método analítico: Ecuación de Estado no Local | 31 |
| 4. Soluciones exactas estáticas con una EENL | 37 |
| 4.1. Sobre las condiciones de energía | 39 |
| 4.2. Método para obtener soluciones estáticas con una EENL | 41 |
| 4.2.1. Ejemplos de soluciones estáticas | 42 |
| 4.2.2. Modelando esferas anisótropas | 49 |
| 4.3. Soluciones con $P = 0$ y $P_{\perp} = 0$ | 50 |
| 4.3.1. Caso 1: $P = 0$ y $P_{\perp} \neq 0$ | 50 |
| 4.3.2. Caso 2: $P_{\perp} = 0$ y $P \neq 0$ | 50 |
| 4.4. Solución con la condición Weyl cero | 52 |
| 4.5. Ejemplos con ecuaciones de estado numéricas | 54 |
| 4.6. Discusión | 58 |
| 5. Familias de soluciones exactas | 61 |
| 5.1. El problema inverso | 62 |
| 5.1.1. Condición de flujo cero | 62 |
| 5.1.2. Caso estático y con simetría esférica | 64 |
| 5.2. Familias de soluciones exactas con una EENL | 66 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 5.3. | Algoritmo para obtener familias de soluciones no locales | 66 |
| 5.4. | Familias de soluciones del tipo Tolman IV | 67 |
| 5.5. | Familias de soluciones conformemente planas | 70 |
| 5.5.1. | Caso 1 | 71 |
| 5.5.2. | Caso 2 | 74 |
| 5.6. | Discusión | 76 |
| 6. | Un Estudio sobre la estabilidad y fracturas | 79 |
| 6.1. | Fracturas y las velocidades del sonido | 81 |
| 6.2. | Perturbaciones, fracturas y la materia anisótropa | 81 |
| 6.2.1. | Modelo anisótropo tipo Tolman VI | 82 |
| 6.2.2. | Modelo no local tipo Stewart 1 | 83 |
| 6.2.3. | Modelo no local tipo Stewart 2 | 83 |
| 6.2.4. | Modelo Florides-Stewart-Gokhroo & Mehra | 84 |
| 6.2.5. | Los modelos | 85 |
| 6.3. | Discusión | 86 |
| 7. | Soluciones exactas dinámicas con una EENL | 89 |
| 7.1. | Evolución en coordenadas de Schwarzschild | 91 |
| 7.1.1. | Modelo 1 | 91 |
| 7.1.2. | Modelo 2 | 94 |
| 7.2. | Evolución en coordenadas de radiación | 96 |
| 7.2.1. | El formalismo HJR y la ecuación de estado no local | 100 |
| 7.2.2. | Un escenario posible de colapso con una EENL | 101 |
| 7.3. | Colineaciones conformes | 104 |
| 7.3.1. | Condiciones de energía | 108 |
| 7.3.2. | Acoplamiento y evolución de la superficie | 109 |
| 7.4. | Discusión | 111 |
| 8. | Conclusiones | 115 |
| A. | Soluciones Estáticas Exactas | 119 |
| B. | Soluciones Estáticas Numéricas | 127 |

Capítulo 1

Introducción

Las propiedades físicas de los materiales, ya sean sus propiedades microscópicas o macroscópicas, están directamente relacionadas con la naturaleza de su estructura molecular y atómica. Desde el punto de vista de la mecánica clásica de los medios continuos, la materia es considerada como una distribución continua, que responde de manera colectiva a la acción de alguna influencia externa, en lugar de una distribución compuesta de átomos o partículas discretas.

Los materiales, ya sean sólidos, líquidos o gaseosos, presentan una serie de características que dependen de su estructura molecular y de las interacciones entre las moléculas. Estas interacciones o fuerzas se encuentran íntimamente relacionadas con la distancia de separación intermolecular. Cada molécula está sometida a la acción de todas las moléculas vecinas, pero en particular a las más cercanas. Esto significa que la respuesta, por el efecto de alguna perturbación, de un punto material estará determinada en su totalidad por el comportamiento de una pequeña vecindad centrada en el punto de estudio.

Por otro lado, también se parte del principio de que cualquier porción de material, por muy pequeña que pueda ser, sirve como una muestra representativa de todo el resto en cuanto a su comportamiento a perturbaciones externas, ya que las leyes que gobiernan al medio se consideran válidas para el material en su totalidad. Esto hace que las interacciones y movimientos intermoleculares del resto del sistema no se tomen en consideración a la hora de hacer un modelo teórico.

El resultado de aislar una pequeña parte de material para representar a todo un sistema, implica que se deben descartar los efectos de la acción de fuerzas o tensiones aplicados a distancia. Sin embargo, estas interacciones aplicadas a distancia, o no locales, son importantes, en algunas situaciones, debido a que su posible transmisión a través de todo el cuerpo, desde un punto a otro, puede afectar los estados de movimiento de cada punto material por todo el sistema.

Las ideas básicas sobre una teoría mecánica de medios continuos no locales fueron introducidas en los años 50 (ver [1] y referencias incluidas), y estaban basadas sobre el hecho de considerar la función de esfuerzos (*stress*) como un promedio en un cierto volumen representativo del medio material centrado en un punto. Desde entonces, son muchas las aplicaciones donde los efectos no locales parecen dominar el comportamiento macroscópico de la materia. Gran cantidad de problemas interesantes surgen de una infinidad de áreas tales como

el análisis de daños y fracturas de materiales, el fenómeno de la tensión superficial en líquidos, la propagación de ondas en sólidos, el flujo de la sangre dentro del cuerpo humano, la dinámica de suspensiones coloidales y el diseño de redes neuronales, para citar solo unos pocos ejemplos.

De manera general, cuando se quieren introducir los efectos no locales en una teoría matemática se hace a través de la incorporación de ecuaciones integro-diferenciales, como hizo Chandrasekhar en 1950 [2] para desarrollar una teoría sobre el transporte de radiación, incorporándole características no locales a la propagación de la radiación.

Los fenómenos astrofísicos nos proveen de escenarios donde la materia existe en condiciones extremas, que no se encuentran o que no pueden ser reproducidas en la Tierra. Un ejemplo: la materia degenerada ultra densa que se supone conforma los objetos compactos del universo. Algunos de estos objetos son agrupados en estrellas denominadas enanas blancas y estrellas de neutrones.

Los objetos estelares compactos son uno de los cuerpos más fascinantes que pueden ser observados. Son los restos de estrellas luminosas que, una vez terminado su combustible nuclear, son incapaces de generar suficiente presión térmica para contrarrestar las fuerzas gravitacionales y evitar un posible colapso gravitacional. Dependiendo de la masa inicial de la estrella progenitora y de la aparición de inestabilidades en el equilibrio de la estructura estelar, pueden ocurrir explosiones de supernova, dejando como resultado un objeto rotante cuyo núcleo puede llegar a tener densidades mayores a la densidad nuclear, esto es, densidades del orden de $(10 - 20)\rho_0$, con $\rho_0 \simeq 2 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$. También se pueden alcanzar enormes energías de enlace gravitacional ($\frac{GM^2}{R} \sim 5 \times 10^{53}$ ergs). La aceleración de la gravedad en la superficie de estos cuerpos compactos es de $\frac{GM}{R^2} \sim 2 \times 10^{14} \text{cm s}^{-2}$. Esto significa que tenemos cuerpos con radios del orden de los 10 Km y masas típicas de 1,4 masas solares. Se podría decir que estos son los objetos más compactos que existen en el universo.

La descripción física de la materia a densidades tan enormes plantea un gran desafío para los investigadores en las áreas de la física nuclear y de altas energías: es necesario considerar diferentes tipos de partículas, sus interacciones y sus abundancias, así como también las transiciones de fase que ocurren por la posible aparición de materia extraña. Esto trae como consecuencia el hecho de que exista un gran desconocimiento en torno a la estructura de la ecuación de estado que describe las propiedades de la materia [3]-[7]. Por otro lado, las evidencias experimentales que se pueden tener actualmente, para estudiar los constituyentes de la materia, provienen básicamente de la extrapolación de los datos obtenidos en los aceleradores de partículas y la física de los rayos cósmicos (ver [8] y referencias incluidas).

Dentro de las estrellas de neutrones, las presiones y densidades no se deben a efectos térmicos. La presión interior que soporta la estrella es el producto de la presión debida a las interacciones nucleares de nucleones degenerados. Esto permite que la aproximación a temperatura cero sea una suposición razonable y que la ecuación de estado resulte ser una ecuación con un único parámetro, esto es, una función del tipo $P = P(\rho)$, donde P es la presión y ρ la densidad de masa-energía.

En una escala microscópica, la descripción física de la materia, con densidades mayores que la densidad nuclear, resulta ser un problema bastante difícil de tratar. Esto se debe a que si se quiere construir un modelo teórico lo más realista posible de objetos compactos

es necesario recurrir directamente al estudio de cuáles son los propios constituyentes de la materia. Esto significa que se deben considerar los diferentes tipos de partículas que conforman el material, sus respectivas abundancias y los diferentes campos que propagan todas las posibles interacciones entre nucleones. Este es el nivel de la física nuclear y de partículas: la física de los bariones, mesones y en última instancia la física de sus constituyentes: los quarks y los gluones.

Una aproximación tradicional al problema nuclear es el de las teorías no relativistas de potenciales para sistemas de muchos cuerpos. Estas se fundamentan en los potenciales derivados de sistemas estáticos de dos cuerpos que son ajustados a los datos experimentales de sistemas nucleón-nucleón. Aunque estas teorías logran predecir en muy buena aproximación las masas máximas y las densidades centrales que pueden llegar a tener objetos como las estrellas de neutrones, presentan características indeseables como es la violación del principio de causalidad.

Como una alternativa al problema de muchos cuerpos, por los años 70, surge un enfoque diferente al estudio de la materia nuclear: la teoría relativista de campos para hadrones interactuantes. Desde la aparición de los trabajos pioneros realizados por Kälman [9] y Walecka [10], donde los nucleones interactúan únicamente a través de campos escalares y mesones vectoriales, hasta los trabajos más recientes donde se consideran estructuras más complejas, se han desarrollado muchos métodos dentro del marco de una teoría relativista de campos para caracterizar las propiedades del equilibrio de la materia densa.

La teoría relativista de campos es particularmente conveniente como teoría física para la descripción de objetos compactos porque, además de predecir algunas de sus más importantes características: masas, radios, energías de enlace, no viola el fundamental principio de causalidad. Además toma en cuenta las propiedades de saturación de la materia y lo que se conoce como la libertad asintótica de los quarks, es decir, la aparición de materia de quarks.

Una teoría física que se adecúa de manera formidable al estudio de objetos compactos es la teoría clásica de la Relatividad General. La estructura del equilibrio para objetos auto-gravitantes puede obtenerse a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, que en el caso simple de configuraciones esféricas, es decir no rotantes, se traducen en las ecuaciones de equilibrio hidrostático o ecuaciones de Tolman, Oppenheimer y Volkoff, también conocidas como las ecuaciones TOV.

El fin principal de este trabajo consiste en proponer una ecuación de estado para la descripción física de objetos astrofísicos compactos, esto es, suponer que la materia ultradensa puede ser descrita a través de una Ecuación de Estado No Local (de ahora en adelante referida como **EENL**) dentro del marco de la teoría de la Relatividad General, y estudiar los diferentes grados de relevancia y aceptabilidad física de esta hipótesis.

Para el caso particular de soluciones estáticas, la **EENL** que se propone [11], es una ecuación que tiene la siguiente forma (en unidades geometrizadas)

$$P(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}. \quad (1.1)$$

Es claro que en la ecuación (1.1) está implícito un efecto colectivo producido por la variable $\rho(r)$, la densidad de masa energía, sobre la presión en la dirección radial $P(r)$: la

presión no sólo es una función de la densidad en un punto particular sino que existe un término en forma de funcional que contribuye a la presión y que toma en cuenta el resto de la configuración. Esto significa que todo cambio en la presión radial se debe entonces a los efectos de las variaciones de la densidad en un punto más las variaciones de la densidad dentro del volumen contenido en el funcional.

Es importante señalar que en el trabajo que se desarrollará a continuación la ecuación (1.1) se generalizará con la finalidad de considerar situaciones de configuraciones de materia en el régimen dinámico, esto permitirá que sea posible seguir la evolución de objetos esféricos radiantes en situaciones de colapso gravitacional.

En [11] se demostró que, bajo ciertas condiciones particulares, una distribución de materia con simetría esférica y anisótropa en la presión (presencia de presiones tangenciales con $P_{\perp} \neq P$) puede ser modelada numéricamente a través de una **EENL**. En ese trabajo fueron estudiados varios modelos para esferas radiantes que colapsan por el efecto de la gravedad. Por otro lado, en [12] se desarrolló un método para generar soluciones estáticas no locales anisótropas y físicamente aceptables.

En lo referente a la anisotropía, el hecho de suponer que los fluidos son perfectos pascalianos ($P = P_{\perp}$) es algo que se encuentra sólidamente sustentado por evidencias observacionales y fundamentos teóricos, sin embargo, una gran cantidad de evidencias teóricas también sugieren que pueden ocurrir fenómenos físicos que dan origen a anisotropías locales. Dentro del esquema newtoniano, las anisotropías locales ocurren por la existencia de distribuciones de velocidades anisótropas, como es indicado en el trabajo clásico de J. H. Jeans [13]. En el contexto de la Relatividad General, G. Lemaître [14] indica que la presencia de anisotropías relaja los límites superiores impuestos al valor máximo del potencial gravitacional en la superficie.

Desde los primeros trabajos realizados por R. Bowers y E. Liang [15], las consecuencias por la presencia de anisotropías locales dentro de la teoría de la Relatividad General han sido ampliamente estudiadas (ver [16] y las referencias incluidas), y la utilización de ecuaciones de estado que las incorporan para modelar estrellas de neutrones altamente magnetizadas o magneto-estrellas, ha llamado la atención de algunos investigadores ([17]-[20]). En estos trabajos se demuestra que los campos magnéticos intensos pueden inducir anisotropías en la presión interna de estrellas compactas. En [18] y [21] se consideran las consecuencias sobre la estabilidad de configuraciones de materia debido a la presencia de anisotropías en las presiones.

Las configuraciones de materia pueden desviarse de su situación de equilibrio si se introducen perturbaciones en el sistema. Estas perturbaciones pueden dar origen a fuerzas radiales en diferentes regiones y con diferente signo, produciendo fracturas en el material. Un tratamiento sobre la aparición de fracturas, debido al afecto de pequeñas fluctuaciones en la anisotropía local, puede ser consultado en: [22]-[24]. En este trabajo se estudiará el problema de la aparición de fracturas desde un punto de vista ligeramente diferente al propuesto por Herrera en [22].

Un aspecto importante en lo referente a la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein tiene que ver con el concepto de las simetrías. Originalmente, éstas se introducen con el fin de simplificar las ecuaciones de campo, y con el transcurso del tiempo

han permitido el desarrollado de diferentes esquemas de clasificación para los diferentes tipos de soluciones [25]-[28]. Del conjunto de posibles simetrías, tal vez las simetrías conformes son las más difíciles de tratar, aún en el caso de fluidos perfectos, ya que las ecuaciones de Killing conformes contienen un factor que por lo general puede depender de todas las cuatro coordenadas [29]-[34].

Saliendo un poco del contexto del trabajo presentado aquí, y que tiene que ver básicamente con la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de la Relatividad General y de la obtención de soluciones dinámicas analíticas para escenarios de colapso gravitacional, una aplicación directa de una **EENL** puede verse en [35]. Allí se desarrollan modelos matemáticos para ciertos objetos exóticos, bastante particulares, denominados mini-agujeros negros. Estos modelos se desarrollan dentro de un esquema conocido como geometría no conmutativa de la gravedad cuántica.

Con respecto a la estructura de este trabajo se tiene lo siguiente: el capítulo 2 estará dedicado a la presentación de los conceptos y ecuaciones básicas de la Relatividad General que serán utilizados. El capítulo 3 se dedica a considerar las ecuaciones de estado para materia densa y se introducen algunos conceptos básicos sobre la teoría de campos, también se postula la forma que tendrá nuestra **EENL**, para el caso general donde no se supone la estaticidad del medio material. En los capítulos 4 y 5 se formulan mecanismos para producir soluciones y familias de soluciones estáticas considerando el hecho de la no localidad y tomando como punto de partida algunas soluciones exactas conocidas de las ecuaciones de Einstein. En el capítulo 6 se introducen y estudian algunos criterios de estabilidad a partir de considerar las velocidades del sonido dentro del material. Para finalizar, en el capítulo 7, se construyen modelos dinámicos, analíticos y semi-numéricos, para seguir la evolución de una esfera de materia que radía y colapsa gravitacionalmente, también se considera la posibilidad de generar soluciones dinámicas que admiten vectores de Killing conformes.

Convenciones

La signatura de las métricas utilizadas será $-2, (+, -, -, -)$. La derivada covariante se indica con punto y coma (;) o por el símbolo ∇ , la derivada parcial con el símbolo ∂ , una coma o un subíndice, ($\frac{\partial f}{\partial x^a} = \partial_a = f_{,a}$). Por lo general, la derivada respecto a la variable temporal se indica con un punto y la derivada con respecto a la variable radial con una prima ($\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}$, $A' = \frac{\partial A}{\partial r}$).

Las cantidades tensoriales se escriben en negrita y sus componentes se especifican con índices latinos en el caso que no se hace referencia a un sistema de coordenadas en particular, ($u^a = [u^0, u^1, u^2, u^3]$). Los índices griegos, ($\mu, \nu, \gamma \dots$), se utilizan cuando se esté haciendo referencia a un sistema de coordenadas particular. También se utilizan las deltas de Kronecker para indicar las componentes de un tensor ($n^a = A\delta_0^a + B\delta_1^a$), o utilizando como subíndices las letras que representan las coordenadas correspondientes al sistema de referencia empleado: ($R_{rt}, T_{\theta\phi}$).

El subíndice s indica que la cantidad es evaluada en la superficie: r_s . El símbolo (+) como índice indica que una cantidad es evaluada en el exterior de la distribución y el símbolo (-) en el interior: $G_{ab}^{(+)}$.

La derivada de Lie en la dirección de un vector ξ^a se indica de la manera usual, \mathcal{L}_ξ .

Las ecuaciones a utilizar se escriben adoptando el sistema de unidades geometrizadas donde $G = c = 1$, y las constantes físicas utilizadas para los resultados numéricos están basados en los siguientes valores:

$$\begin{aligned} c &= 2,9979 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}, \\ G &= 6,673 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ M_\odot &= 1,989 \times 10^{33} \text{ g} = 1477 \text{ m}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Ecuaciones de la Relatividad General

2.1. Ecuaciones básicas

Existe una gran variedad de escenarios de interés astrofísico donde la materia puede alcanzar velocidades de movimiento extremadamente grandes y donde la hidrodinámica evoluciona en presencia de campos gravitacionales enormes ($\approx 5 \times 10^{53}$ erg $\approx 0,2 M c^2$). En estos casos, surgen efectos relativistas que no pueden ser depreciados y es necesario desarrollar un esquema de estudio dentro del marco de la teoría de la Relatividad General. Este capítulo se dedicará básicamente a desarrollar un resumen de las ecuaciones básicas de la Relatividad General.

En la teoría de la relatividad tanto el espacio como el tiempo se representan como una sola entidad llamada espacio-tiempo y cada punto (o evento) requiere de cuatro números (x^0, x^1, x^2, x^3) para su completa especificación. En este espacio-tiempo, las ecuaciones de la física se deben expresar de manera tal que no dependan de un observador en particular. El observador es quien hace las medidas, es decir, es quien asigna las coordenadas a un punto (o evento) del espacio-tiempo. Se dice entonces que las leyes de la física deben ser covariantes cuando se pasa de un observador a otro, o dicho de otra manera, cuando cambiamos de un sistema de referencia a otro:

$$x^a = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longrightarrow x^{a'} = (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}).$$

Esta covariancia para las ecuaciones de la física se logra de manera natural si las ecuaciones se formulan como tensoriales.

De una manera más formal, se dice que en la teoría de la Relatividad General, el espacio y el tiempo se representan por una *variedad riemanniana diferenciable* de dimensión cuatro [36], en la cual se define un tensor métrico \mathbf{g} , con signatura de Lorentz, que satisface las siguientes ecuaciones, conocidas como las ecuaciones de Einstein:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (2.1)$$

En general, las ecuaciones de Einstein constituyen un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, no lineal, para las componentes del

tensor métrico. Como T_{ab} y G_{ab} son tensores simétricos, el sistema de ecuaciones queda conformado por diez ecuaciones. Por otro lado, a partir de una propiedad del tensor de Einstein, conocida como la identidad de Bianchi, $G^{ab}{}_{;b} = 0$, el sistema acoplado de ecuaciones se reduce a un sistema de seis ecuaciones.

A las cantidades T_{ab} se les conoce como el tensor de energía-impulso o tensor de materia, y viene a ser la fuente del campo gravitacional. Los tensores R_{ab} y R son contracciones del tensor de curvatura de Riemann $R_{acb}{}^d$, el cual representa la curvatura del espacio-tiempo, y vienen dados por:

$$R_{ab} = R_{acb}{}^c = \partial_c \Gamma^c{}_{ab} - \partial_a \Gamma^c{}_{cb} + \Gamma^d{}_{ab} \Gamma^c{}_{dc} - \Gamma^d{}_{cb} \Gamma^c{}_{da}, \quad (2.2)$$

$$R = R_a{}^a. \quad (2.3)$$

Los símbolos $\Gamma^c{}_{ab}$ (símbolos de Christoffel) se expresan en términos del tensor métrico y de sus primeras derivadas de la siguiente manera:

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} [\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}] = \Gamma^c{}_{ba}. \quad (2.4)$$

Los símbolos de Christoffel permiten definir una nueva derivada, la derivada covariante.

La curvatura del espacio tiempo se ve fundamentalmente reflejada en el hecho de que las derivadas covariantes no conmutan, de manera que se puede definir un tensor del tipo (0,3) de la siguiente forma

$$u_{a;bc} - u_{a;cb} = R_{abc}{}^d u_d,$$

donde $R_{abc}{}^d$ es el tensor de curvatura de Riemann. Esta última ecuación se conoce como la identidad de Ricci.

Por todo lo dicho anteriormente, se puede ver que existe una cantidad fundamental que es el tensor métrico \mathbf{g} . Este es un tensor simétrico ($g_{ab} = g_{ba}$) de rango 2 que determina la distancia entre dos puntos (eventos) vecinos del espacio-tiempo:

$$ds^2 = g_{ab}(x^c) dx^a dx^b, \quad (2.5)$$

las cantidades g_{ab} son las componentes del tensor métrico y representan el campo gravitacional. La signatura de esta métrica se dice que es de Lorentz por tener la forma $(+ - - -)$.

Los campos gravitacionales con simetría esférica son de sumo interés en el estudio de objetos astrofísicos esféricos tales como estrellas o cúmulos de estrellas. Un espacio-tiempo con simetría esférica es aquel en el cual el elemento métrico permanece invariante bajo rotaciones. Se tiene que sobre cada esfera de dimensión dos, con r y t constantes, la distancia entre dos puntos viene dada por

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.6)$$

las cantidades θ y ϕ son las variables angulares usuales.

En un espacio-tiempo esféricamente simétrico se puede definir un sistema de coordenadas, que se denomina *sistema de coordenadas de Schwarzschild* o *de curvatura* donde:

$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, r, \theta, \phi)$, con respecto al cual el elemento de línea se escribe de la siguiente forma general:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.7)$$

donde $\nu = \nu(t, r)$ y $\lambda = \lambda(t, r)$. Otra manera de escribir (2.7) es la siguiente:

$$g_{ab} = \text{diag} (e^{2\nu}, -e^{2\lambda}, -r^2, -r^2 \text{sen}^2\theta). \quad (2.8)$$

Las cuatro ecuaciones de Einstein que resultan a partir de (2.7) son:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[2\lambda' - \frac{1}{r} \right] = 8\pi T_0^0, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[2\nu' + \frac{1}{r} \right] = 8\pi T_1^1, \quad (2.10)$$

$$\frac{2\dot{\lambda}}{r} = 8\pi T_{01}, \quad (2.11)$$

$$e^{-2\nu} \left[\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda} \right] + e^{-2\lambda} \left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 \right] = 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3, \quad (2.12)$$

donde los puntos indican derivadas respecto al tiempo y las primas derivadas respecto a la coordenada r .

La ecuación (2.9) se puede integrar formalmente para obtener la expresión:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr. \quad (2.13)$$

Resulta de mucha utilidad definir una nueva función, denominada función masa [37], de la manera siguiente:

$$m(r, t) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr, \quad (2.14)$$

con $m = 0$ en $r = 0$. De manera que la ecuación (2.13) se puede escribir como:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (2.15)$$

La función masa (2.14) coincide con la función masa de Misner que se obtiene a partir del tensor de Riemann [38]

$$m(t, r) = \frac{r^2}{2} R_{\theta\phi\theta}^{\phi}. \quad (2.16)$$

Si queremos resolver el sistema conformado por la ecuaciones de Einstein, es necesario determinar qué forma debe tener el tensor de energía-impulso. En lo que sigue, supondremos que el medio material tiene la forma de un medio continuo.

2.2. Cinemática de un medio material

Se necesita, como ya se mencionó, hacer una descripción del movimiento de las partículas que conforman el fluido de tal manera que no dependan de un observador en particular. Un observador que sea comóvil con el fluido puede registrar su historia representando la *línea de mundo* de la partícula ubicada en un punto específico. Esta línea de mundo describe el movimiento de la partícula en el espacio-tiempo. Si τ es el tiempo medido por este observador comóvil con el fluido, el tiempo propio, la línea de mundo es entonces $x^a = x^a(\tau)$.

En relatividad se define la quadri-velocidad u^a de una partícula como el vector tangente a su línea de mundo:

$$u^a \equiv \frac{dx^a}{d\tau}, \quad \text{con} \quad u^a u_a = 1, \quad (2.17)$$

a u^a se le denomina un vector unitario tipo tiempo. Si en el plano perpendicular a u^a escogemos tres vectores unitarios y mutuamente ortogonales, a tal sistema de cuatro vectores se le denomina un sistema de referencia local para un observador comóvil.

La quadri-aceleración se define como

$$a^a = u^a{}_{;b} u^b \quad \Rightarrow \quad a^a u_a = 0, \quad (2.18)$$

de manera que una partícula satisface la ecuación de la geodésica

$$u^a{}_{;b} u^b = 0.$$

Las partículas que se pueden mover a la velocidad de la luz (fotones) se moverán en el espacio-tiempo a lo largo de geodésicas nulas, es decir, a lo largo de geodésicas con $ds = 0$. En este caso no se puede parametrizar la línea de mundo con el tiempo propio. Sin embargo, un observador comóvil en el sistema de referencia local le puede asociar a los fotones un quadri-vector de onda k^a , el cual es un vector nulo, $k^a k_a = 0$, que satisface la ecuación $k^a{}_{;b} k^b = 0$. En este observatorio comóvil la frecuencia de los fotones es: $\nu = -k_a u^a$, y se puede escribir una expresión covariante para el corrimiento al rojo z entre dos eventos, el evento donde se emite la radiación de frecuencia ν_e y el evento donde se recibe ν_r , esto es:

$$1 + z \equiv \frac{\nu_e}{\nu_r}. \quad (2.19)$$

En el caso de un objeto esférico, en coordenadas de Schwarzschild, el corrimiento al rojo sobre la superficie de la esfera de materia, donde $r = r_s = R$, es:

$$z = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.20)$$

Así como existe un valor máximo para la cantidad masa-radio, M/R , permitido para objetos esféricos isótropos, esto es, $M/R < 8/9$ [39], se puede deducir entonces que existe un valor máximo para el corrimiento al rojo: $z < 2$, para objetos esféricos estables. Queda claro que al medir corrimientos al rojo de estrellas compactas es posible entonces determinar la relación M/R .

Por otro lado, existe un conjunto de cantidades cinemáticas que permiten caracterizar el movimiento de un medio material. Se puede demostrar que la derivada covariante de la cuadri-velocidad u_a puede descomponerse de la siguiente manera:

$$u_{a;b} = \varpi_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + a_a u_b, \quad (2.21)$$

donde a_a es la cuadri-aceleración del medio. El escalar Θ se denomina la expansión de las líneas de mundo del material, σ_{ab} el tensor de deformación o *shear*, ϖ_{ab} el tensor de *vorticidad* o de rotación y h_{ab} es el operador proyección sobre un plano perpendicular a u_a . Todas estas cantidades son una generalización relativista de la expansión, la deformación y la vorticidad definidas en la hidrodinámica newtoniana.

Cada una de estas cantidades se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones:

$$\Theta = u^a{}_{;a}, \quad (2.22)$$

$$a_a = u^b u_{a;b}, \quad (2.23)$$

$$h_{ab} = g_{ab} - u_a u_b, \quad (2.24)$$

$$\varpi_{ab} = \frac{1}{2}(u_{a;b} - u_{b;a}) - \frac{1}{2}(a_a u_b - a_b u_a), \quad (2.25)$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2}(u_{a;b} + u_{b;a}) - \frac{1}{2}(a_a u_b + a_b u_a) - \frac{1}{3}\Theta h_{ab}. \quad (2.26)$$

Se dice que el material es inercial cuando $a^2 = -a^a a_a = 0$, es un medio irrotacional cuando $\varpi^2 = -\frac{1}{2}\varpi^{ab}\varpi_{ab} = 0$ y que conserva su volúmen cuando $\Theta = 0$. Por otro lado, si el material se mueve con $\sigma^2 = -\frac{1}{2}\sigma^{ab}\sigma_{ab} = 0$ se dice que es libre de *shear*, en este caso el medio material sólo puede contraerse o expandirse.

Ahora bien, en un sistema de referencia comóvil, la cuadri-velocidad, que denotaremos con \hat{u}_a es:

$$\hat{u}_\mu = (1, 0, 0, 0) = \delta_\mu^0.$$

En un sistema no comóvil con el fluido, el material se moverá con una velocidad radial ω , por lo tanto, una transformación de Lorentz nos permitirá escribir la cuadri-velocidad en este nuevo sistema de referencia. Una transformación de Lorentz, sobre la cuadri-velocidad, es una transformación de la forma:

$$\bar{u}_\mu = L(-\omega)_\mu^\nu \hat{u}_\nu, \quad (2.27)$$

por lo tanto:

$$\bar{u}_\mu = \gamma(1, -\omega, 0, 0), \quad (2.28)$$

donde γ es el factor de Lorentz $\gamma = (1 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$.

El espacio-tiempo plano, en coordenadas cartesianas, se describe por un tensor métrico de la forma

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.29)$$

Los elementos métricos (2.7) y (2.29) se relacionan a través de la transformación

$$d\tau = e^\nu dt, \quad dx = e^\lambda dr, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \text{sen}\theta d\phi, \quad (2.30)$$

aquí ν y λ se consideran constantes por el hecho de que ésta es una transformación local de coordenadas.

Una transformación local de coordenadas sobre (2.28) permite expresar la cuadi-velocidad en coordenadas curvilíneas

$$u_\mu = \Lambda_\mu^\nu \bar{u}_\nu, \quad (2.31)$$

donde la matriz Λ_μ^ν se puede hallar a partir de (2.30). Con esta transformación resulta que la cuadi-velocidad queda como

$$u_\mu = \gamma(e^\nu, -\omega e^\lambda, 0, 0), \quad (2.32)$$

A partir de las ecuaciones (2.7) y (2.32), las cantidades cinemáticas que resultan son las siguientes:

$$\Theta = \frac{e^{-\lambda} \left[(1 - \omega^2) \left(2 \frac{\omega}{r} + \omega \nu' + \dot{\lambda} e^{(\lambda-\nu)} \right) + \omega' + \omega \dot{\omega} e^{(\lambda-\nu)} \right]}{(1 - \omega^2)^{3/2}}, \quad (2.33)$$

$$a_r = - \frac{(1 - \omega^2) \left[\nu' + \omega \dot{\lambda} e^{(\lambda-\nu)} \right] + \omega \omega' + \dot{\omega} e^{(\lambda-\nu)}}{(1 - \omega^2)^2}, \quad (2.34)$$

$$a_t = -\omega e^{(\nu-\lambda)} a_r, \quad (2.35)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2 e^\lambda \left[(1 - \omega^2) \left(\frac{\omega}{r} - \omega \nu' - \dot{\lambda} e^{(\lambda-\nu)} \right) - \omega' - \omega \dot{\omega} e^{(\lambda-\nu)} \right]}{3 (1 - \omega^2)^{5/2}}, \quad (2.36)$$

$$\sigma_{tt} = \omega^2 e^{2(\nu-\lambda)} \sigma_{rr}, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{tr} = -\omega e^{(\nu-\lambda)} \sigma_{rr}, \quad (2.38)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{r^2}{2} (1 - \omega^2) e^{-2\lambda} \sigma_{rr}, \quad (2.39)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \text{sen}^2(\theta) \sigma_{\theta\theta}, \quad (2.40)$$

$$\varpi_{\mu\nu} = 0. \quad (2.41)$$

La velocidad de la materia en las coordenadas de Schwarzschild puede escribirse a partir de las ecuaciones (2.30):

$$\frac{dr}{dt} = \omega e^{(\nu-\lambda)}, \quad (2.42)$$

donde $\frac{dr}{dt}$ es la velocidad coordenada.

2.3. Descripción de la materia

En Relatividad General, las distribuciones de materia se representan por un tensor de energía-impulso, $T_{\mu\nu}$. Este tensor es un objeto matemático que contiene el conjunto de variables físicas que permiten hacer una descripción macroscópica de una distribución continua de materia. En el caso de un fluido perfecto, es decir, un medio material pascaliano donde

no existen ni viscosidad ni propagación de radiación, el tensor de energía-impulso se puede escribir de la siguiente manera:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

donde ρ es la densidad de masa-energía, P la presión isotrópica o densidad de momento y u_a la cuadri-velocidad del fluido. El tensor de materia $T_{\mu\nu}$ debe satisfacer la ecuación de movimiento

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.44)$$

Para los efectos de considerar un escenario más rico desde el punto de vista astrofísico, el tensor de energía-impulso se supondrá de manera tal que permita describir un medio material con anisotropía en la presión, y en el que además existe disipación de energía a través de un flujo radial de radiación en forma de calor.

Para un observador en un sistema de referencia comóvil, y local de Minkowski, con el material, el tensor de energía-impulso es el siguiente:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = (\rho + P_\perp)\hat{u}_\mu\hat{u}_\nu - P_\perp\eta_{\mu\nu} + (P - P_\perp)\hat{v}_\mu\hat{v}_\nu + \hat{f}_\mu\hat{u}_\nu + \hat{f}_\nu\hat{u}_\mu, \quad (2.45)$$

donde P es la presión en la dirección radial, P_\perp la presión en la dirección tangencial, $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico de Minkowski, \hat{f}_μ el campo de radiación y donde:

$$\hat{u}_\mu = (1, 0, 0, 0) = \delta_\mu^0, \quad \hat{v}_\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta_\mu^1, \quad \hat{f}_\mu = -q(0, 1, 0, 0) = -q\hat{v}_\mu, \quad (2.46)$$

con q como la cantidad que describe la densidad de flujo de radiación.

El tensor de energía-impulso en un sistema de coordenadas inmóvil respecto a las coordenadas de Minkowski se obtiene, como ya vimos, a través de la transformación de Lorentz: $\bar{T}_{\mu\nu} = L_\mu^\gamma L_\nu^\delta \hat{T}_{\gamma\delta}$. Por lo tanto resulta que:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = (\rho + P_\perp)\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu - P_\perp\eta_{\mu\nu} + (P - P_\perp)\bar{v}_\mu\bar{v}_\nu + \bar{f}_\mu\bar{u}_\nu + \bar{f}_\nu\bar{u}_\mu, \quad (2.47)$$

donde:

$$\bar{u}_\mu = \gamma(1, -\omega, 0, 0), \quad \bar{v}_\mu = \gamma(-\omega, 1, 0, 0), \quad \bar{f}_\mu = -q\gamma(-\omega, 1, 0, 0). \quad (2.48)$$

El tensor de energía-impulso para la métrica (2.7), es decir, bajo una transformación de la forma: $T_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\gamma \Lambda_\nu^\delta \bar{T}_{\gamma\delta}$, es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_\perp)u_\mu u_\nu - P_\perp g_{\mu\nu} + (P - P_\perp)v_\mu v_\nu + f_\mu u_\nu + f_\nu u_\mu, \quad (2.49)$$

con:

$$u_\mu = \gamma(e^\nu, -\omega e^\lambda, 0, 0), \quad v_\mu = \gamma(\omega e^\nu, -e^\lambda, 0, 0), \quad f_\mu = q\gamma(\omega e^\nu, -e^\lambda, 0, 0). \quad (2.50)$$

Al introducir el tensor de energía-impulso (2.49) en las ecuaciones de Einstein (2.9)-(2.12) resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[2\lambda' - \frac{1}{r} \right] = 8\pi \left[\frac{\rho + \omega^2 P + 2\omega q}{1 - \omega^2} \right], \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[2\nu' + \frac{1}{r} \right] = -8\pi \left[\frac{P + \omega^2 \rho + 2\omega q}{1 - \omega^2} \right], \quad (2.52)$$

$$\frac{2\dot{\lambda}}{r} = -8\pi \left[\frac{\omega(\rho + P) + q(1 + \omega^2)}{1 - \omega^2} \right] e^{(\nu+\lambda)}, \quad (2.53)$$

$$e^{-2\nu} \left[\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda} \right] + e^{-2\lambda} \left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 \right] = -8\pi P_{\perp}. \quad (2.54)$$

Es de hacer notar que es posible despejar de manera algebraica las variables físicas ρ , P , P_{\perp} y q de las ecuaciones (2.51)-(2.54), de manera que un sistema equivalente al anterior resulta ser:

$$\rho = \frac{e^{-2\lambda} (2r\nu' - e^{2\lambda} + 1) \omega^2 + 4r\omega\dot{\lambda}e^{-(\nu+\lambda)} - e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda') + 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)}, \quad (2.55)$$

$$P = \rho - \frac{e^{-2\lambda}}{4\pi r^2} \left[r(\lambda' - \nu') + e^{2\lambda} - 1 \right], \quad (2.56)$$

$$q = -\frac{\omega(\rho + P)}{1 + \omega^2} - \frac{(1 - \omega^2)\dot{\lambda}e^{-(\nu+\lambda)}}{4\pi r(1 + \omega^2)}, \quad (2.57)$$

$$P_{\perp} = -\frac{e^{-2\nu}}{8\pi} \left[\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda} \right] - \frac{e^{-2\lambda}}{8\pi} \left[\frac{\lambda' - \nu'}{r} - \nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 \right]. \quad (2.58)$$

Por lo tanto, la estructura de una esfera relativista estará determinada tanto por las funciones de la métrica ν y λ como por las variables físicas: ρ , P , P_{\perp} , q y ω .

Por otra parte, el cálculo de $T^{1b}{}_{;b} = 0$ para el tensor de materia (2.49) resulta en la siguiente ecuación:

$$\dot{\lambda}^2 + \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} = 4\pi r e^{2\nu} \left[- (T_1^1)' + (T_0^0 - T_1^1) \nu' + \frac{2}{r} (T_2^2 - T_1^1) \right]. \quad (2.59)$$

Esta última ecuación es una generalización de la ecuación de equilibrio hidrostático o ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). A pesar de que las ecuaciones que surgen de (2.59) no agregan ningún tipo de información adicional, las expresiones obtenidas a partir de esta ecuación se pueden, en algunos casos, manipular o integrar de manera más sencilla que las propias ecuaciones de Einstein.

2.4. Condiciones de acoplamiento

Para estudiar la evolución de la configuración de materia, es necesario poder acoplar las soluciones interior y exterior de las ecuaciones de Einstein sobre la superficie de la distribución, que representa la separación de los espacio-tiempos involucrados. De esta manera se evita que las variables hidrodinámicas presenten comportamientos singulares sobre la región de separación y además se garantiza que las soluciones describan ambos espacio-tiempos: el interior y el exterior. Darmois [40] estableció las condiciones necesarias y suficientes para el acoplamiento de dos regiones del espacio-tiempo. Estas condiciones estipulan que si la región interior $M^{(-)}$, con métrica $g_{ab}^{(-)}(x_-^c)$, y la región exterior $M^{(+)}$, con métrica $g_{ab}^{(+)}(x_+^c)$, se unen sobre una 3-superficie de separación con métrica inducida

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) d\Omega^2, \quad (2.60)$$

y de coordenadas $\zeta^i = (\tau, \theta, \phi)$, entonces, las condiciones necesarias y suficientes para que exista un acoplamiento entre ambos espacio-tiempo son:

1. Que la primera forma fundamental, o curvatura intrínseca, de ambas métricas sea continua a través de la superficie S :

$$\left[g_{ab}^{(+)} \right]_s = \left[g_{ab}^{(-)} \right]_s . \quad (2.61)$$

2. Que la segunda forma fundamental, o curvatura extrínseca, de ambas métricas sea continua a través de la superficie S :

$$K_{ij}^{(+)} = K_{ij}^{(-)} , \quad (2.62)$$

donde

$$K_{ij}^{(\pm)} = -\eta_c^{(\pm)} \left[\frac{\partial^2 x^c}{\partial \zeta^i \partial \zeta^j} + \Gamma_{ab}^c \frac{\partial x^a}{\partial \zeta^i} \frac{\partial x^b}{\partial \zeta^j} \right] , \quad (2.63)$$

con $\eta_c^{(\pm)}$ como las componentes de las normales a S ,

$$\eta_c^{(\pm)} = \pm \frac{\partial_c S}{(g^{ab} \partial_a S \partial_b S)^{\frac{1}{2}}} . \quad (2.64)$$

Para acoplar la métrica interior (2.7), en coordenadas (t, r, θ, ϕ) ,

$$ds_{(-)}^2 = e^{2\nu(t,r)} dt^2 - e^{2\lambda(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (2.65)$$

con la métrica exterior de Vaidya [41], en coordenadas (U, R, Θ, Φ) ,

$$ds_{(+)}^2 = \left[1 - \frac{2M(U)}{R} \right] dU^2 + 2dU dR - r^2 d\Omega^2 , \quad (2.66)$$

es necesario escribir una expresión para la métrica inducida en la superficie S en cada una de los espacio-tiempos involucrados.

Las ecuaciones de la superficie S se pueden escribir como

$$r - r_s(t) = 0 , \quad \text{en } M^{(-)} , \quad (2.67)$$

$$R - R_s(U) = 0 , \quad \text{en } M^{(+)} . \quad (2.68)$$

Por lo tanto, para la métrica inducida (2.65), sobre la superficie se tiene

$$ds_{(-)}^2 = \left[e^{2\nu} - e^{2\lambda} \left(\frac{dr_s}{dt} \right)^2 \right] dt^2 - r_s^2 d\Omega^2 . \quad (2.69)$$

De la misma manera para (2.66)

$$ds_{(+)}^2 = \left[\left(1 - \frac{2M(U)}{R_s} \right) + 2 \frac{dR_s}{dU} \right] dU^2 - R_s^2 d\Omega^2 . \quad (2.70)$$

Exigir la continuidad de la primera forma fundamental en la superficie S es exigir que

$$d\tau = \left[e^{2\nu} - e^{2\lambda} \left(\frac{dr_s}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \left[\left(1 - \frac{2M(U)}{R_s} \right) + 2 \frac{dR_s}{dU} \right]^{\frac{1}{2}} dU, \quad (2.71)$$

$$R(\tau) = R_s(T) = r_s(u). \quad (2.72)$$

Utilizando la transformación de coordenadas que permite pasar de las coordenadas de radiación (U, R, Θ, Φ) a las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) [42]:

$$dt = dU + \frac{dR}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)} e^{-2\beta}, \quad (2.73)$$

$$dr = dR, \quad (2.74)$$

$$d\theta = d\Theta, \quad (2.75)$$

$$d\phi = d\Phi, \quad (2.76)$$

se obtiene

$$\frac{dU}{dt} = 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)} \frac{dr}{dt}. \quad (2.77)$$

Al evaluar esta última expresión en la superficie resulta

$$\left[\frac{dU}{dt} \right]_s = 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R_s}\right)} \frac{dr_s}{dt}, \quad (2.78)$$

pero utilizando (2.74)

$$\frac{dr_s}{dt} = \frac{dR_s}{dU} \frac{dU}{dt}, \quad (2.79)$$

el resultado es el siguiente

$$\left[\frac{dU}{dt} \right]_s = \left(1 - \frac{2M}{R_s} \right) \left[\left(1 - \frac{2M}{R_s} \right) + \frac{dR_s}{dU} \right]^{-1}. \quad (2.80)$$

Con (2.80), la condición sobre la igualdad de la primera forma fundamental (2.71) se puede escribir de la siguiente manera

$$e^{2\nu_s} \left[\left(1 - \frac{2M}{R_s} \right) + \frac{dR_s}{dU} \right]^2 - \left(1 - \frac{2M}{R_s} \right)^3 = \left[e^{2\lambda_s} \left(\frac{dR_s}{dU} \right)^2 + 2 \frac{dR_s}{dU} \right] \left(1 - \frac{2M}{R_s} \right)^2, \quad (2.81)$$

la cual se satisface sí

$$e^{2\nu_s} = 1 - \frac{2M}{r_s}, \quad (2.82)$$

$$e^{2\lambda_s} = \left(1 - \frac{2M}{r_s} \right)^{-1}. \quad (2.83)$$

En lugar de calcular las componentes para las cantidades de la segunda forma fundamental, una manera equivalente de acoplar ambas métricas, es exigir la continuidad de las ecuaciones (2.82) y (2.83) y de la continuidad del flujo radial de momento a través de la superficie S [43], es decir,

$$[T_{ab} e^a \eta^b]^{(-)} = [T_{ab} e^a \eta^b]^{(+)} , \quad (2.84)$$

donde $e^a_{(\pm)}$ es el siguiente vector unitario:

$$e^a_{(-)} = e^{-\nu/2} [1, 0, 0, 0] , \quad (2.85)$$

$$e^a_{(+)} = \dot{U} \left[1, \frac{dR}{dU}, 0, 0 \right] . \quad (2.86)$$

aquí, el punto indica derivada respecto a τ .

Si se considera el tensor de materia para un fluido anisótropo, de densidad de energía ρ , presión radial P , presión tangencial P_{\perp} y con conducción de calor definido a través del vector flujo de calor f_a , ($f_a f^a = -q^2$), donde q es la densidad del flujo de radiación:

$$T_{ab} = (\rho + P_{\perp}) u_a u_b - P_{\perp} g_{ab} + (P - P_{\perp}) n_a n_b + f_a u_b + f_b u_a , \quad (2.87)$$

con n_{μ} como un vector tipo espacio, y donde

$$u_a = e^{\nu/2} \delta_a^0 , \quad n_a = e^{\lambda/2} \delta_a^1 , \quad f_a = -q n_a , \quad (2.88)$$

y para el exterior

$$T_{ab}^{(+)} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dU} \delta_a^0 \delta_b^0 , \quad (2.89)$$

entonces, las cantidades $\eta^a_{(\pm)}$ calculadas a partir de la ecuación (2.64) son las siguientes

$$\eta^a_{(-)} = -e^{-\lambda/2} [0, 1, 0, 0] , \quad (2.90)$$

$$\eta^a_{(+)} = \dot{U} \left[1, -\left(1 - \frac{2M}{r_s} + \frac{dR}{dU} \right), 0, 0 \right] , \quad (2.91)$$

por lo tanto, la igualdad (2.84) resulta en:

$$8\pi q_s = -\frac{\dot{U}^2}{4\pi R_s^2} \frac{dM}{dU} . \quad (2.92)$$

Para que las variables físicas que aparecen en el tensor de energía-impulso no presenten comportamientos singulares en la superficie se puede exigir lo siguiente [44]

$$[T_{ab} \eta^a \eta^b]^{(-)} = [T_{ab} \eta^a \eta^b]^{(+)} , \quad (2.93)$$

lo cual nos lleva al siguiente resultado:

$$8\pi [P]_s = -\frac{\dot{U}^2}{4\pi R_s^2} \frac{dM}{dU} . \quad (2.94)$$

Por lo tanto, la presión en la superficie es distinta de cero y será igual a la densidad de energía por conducción de calor [43]

$$[q]_s = [P]_s . \quad (2.95)$$

En resumen, las condiciones necesarias y suficientes para acoplar las métricas (2.65) y (2.66) sobre la superficie de separación S se satisfacen si se cumplen las ecuaciones (2.71), (2.72), (2.92) y (2.94) (o de manera equivalente (2.95)).

2.5. Aceptabilidad física y condiciones de energía

Cuando se quiere resolver el conjunto de ecuaciones de Einstein, en el caso de distribuciones de materia acotadas, muchas veces se recurre a hipótesis simplificadoras. Estas simplificaciones pueden llevar a soluciones con un pobre contacto con situaciones físicas reales, es decir, muchas veces las soluciones describen situaciones no físicas. Es entonces necesario establecer un conjunto mínimo de condiciones de aceptabilidad sobre las soluciones para establecer si éstas tienen sentido físico o no [45]. El conjunto de condiciones se puede resumir de la manera siguiente:

- La densidad debe ser positiva y su gradiente debe ser negativo dentro de la distribución de materia.

$$\rho > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} < 0 . \quad (2.96)$$

Adicionalmente, también estableceremos que:

- La presión radial debe ser positiva y su gradiente debe ser negativo

$$P \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial r} < 0 . \quad (2.97)$$

- La velocidad del sonido debe ser menor que c .

$$v_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} \leq 1 . \quad (2.98)$$

Ahora bien, el problema de verificar las condiciones de energía está estrechamente relacionado con el problema de autovalores del tensor de energía-impulso [36]

$$T_a^b v^a = \lambda v^b , \quad (2.99)$$

donde v^a es el autovector correspondiente al autovalor λ . La ecuación característica para la ecuación de autovalores anterior es

$$| T_a^b - \lambda \delta_a^b | = 0 , \quad (2.100)$$

de manera que los autovalores λ son las raíces de la ecuación característica.

Con la expresión para el tensor de energía-impulso (2.87) y la ecuación (2.100) se tienen los siguientes autovalores λ

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}[\rho - P + \Delta], \quad (2.101)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[\rho - P - \Delta], \quad (2.102)$$

$$\lambda_2 = -P_{\perp}, \quad (2.103)$$

$$\lambda_3 = -P_{\perp}, \quad (2.104)$$

donde

$$\Delta = [(\rho + P)^2 - 4q^2]^{1/2}. \quad (2.105)$$

Por lo tanto, una de las condiciones que debe ser tomada en cuenta es que la cantidad subradical de la expresión para Δ sea mayor que cero, es decir

$$\rho + P \geq 2q. \quad (2.106)$$

Kolassis, Santos y Tsoubelis [45] investigan las condiciones de energía para fluidos imperfectos y para el caso de fluidos anisótropos genéricos se tiene que la Condición de Energía Débil se cumple sí y sólo sí, además de (2.106), se satisface

$$\rho - P + \Delta \geq 0. \quad (2.107)$$

La Condición de Energía Dominante es satisfecha sí y sólo sí, además de (2.106), se cumplen

$$\rho - P \geq 0, \quad (2.108)$$

$$\rho - P - 2P_{\perp} + \Delta \geq 0. \quad (2.109)$$

Finalmente, la Condición de Energía Fuerte es satisfecha sí y solo sí, además de (2.106), se cumple también

$$2P_{\perp} + \Delta \geq 0. \quad (2.110)$$

2.6. Simetrías en Relatividad General

En Relatividad General se define una simetría geométrica, o colineación, a una relación de la forma

$$\mathcal{L}_{\xi}\Omega = \Xi, \quad (2.111)$$

donde \mathcal{L}_{ξ} es el operador derivada de Lie en la dirección del campo vectorial ξ^a . Al vector ξ^a se le denomina vector de colineación o de simetría. El objeto Ω puede ser alguna de las cantidades que aparecen en las ecuaciones de Einstein (2.1), o cantidades derivadas de ellas, como: g_{ab} , R_{ab} y Γ^a_{bc} . El tensor Ξ debe tener la misma simetría en los índices que Ω .

Los diferentes tipos de simetrías, se definen a través de las propiedades de invariancia de los campos tensoriales fundamentales de la teoría, y pueden ser los siguientes [46]

1. **Colineaciones de Ricci:** $\mathcal{L}_\xi R_{ab} = 0$.
2. **Colineaciones de Curvatura:** $\mathcal{L}_\xi R^a_{bcd} = 0$.
3. **Colineaciones Proyectivas de Weyl:** $\mathcal{L}_\xi W^a_{bcd} = 0$.
4. **Colineaciones Afines:** $\mathcal{L}_\xi \Gamma^a_{bc} = 0$.
5. **Colineaciones Conformes:** $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2\psi g_{ab}$.

En el caso del tensor métrico, se definen las isometrías como un grupo de transformaciones que dejan invariante la forma de \mathbf{g} bajo un cambio de coordenadas: $x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu$, es decir,

$$\hat{g}_{ab}(\hat{x}^\mu) = g_{ab}(x^\mu). \quad (2.112)$$

De la ley de transformación

$$g_{ab}(x^\mu) = \frac{\partial \hat{x}^c}{\partial x^a} \frac{\partial \hat{x}^d}{\partial x^b} \hat{g}_{cd}(\hat{x}^\mu), \quad (2.113)$$

de (2.112), de considerar una transformación de coordenadas infinitesimal, $\hat{x}^a = x^a + \alpha \xi^a(x^\mu)$, con $\alpha \ll 1$, y tomando en cuenta sólo los términos hasta primer orden en α , se llega a la ecuación: [47]

$$g_{ab} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^c} + g_{ca} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^b} + \xi^a \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^a} = 0. \quad (2.114)$$

Como $\xi_b = g_{ab} \xi^a$, de la expresión (2.114) se obtiene la ecuación de Killing

$$\frac{\partial \xi_a}{\partial x^b} + \frac{\partial \xi_b}{\partial x^a} - 2\xi_c \Gamma^c_{ba} = 0, \quad (2.115)$$

la cual se puede escribir de una forma más compacta como:

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0. \quad (2.116)$$

Los vectores de Killing (ξ) generan el grupo de isometrías que dejan la forma de la métrica invariante. El problema de hallar las isometrías de un espacio-tiempo se reduce al problema de encontrar todos los vectores de Killing para un tensor métrico dado.

En particular, el campo gravitacional es simétricamente esférico, sí y sólo sí, existen tres vectores de Killing linealmente independientes que satisfacen [3]

$$[\xi_a, \xi_b] = \varepsilon_{abc} \xi_c, \quad (2.117)$$

donde ε_{abc} es un tensor completamente antisimétrico y con $\varepsilon_{123} = 1$. En coordenadas esféricas, estos vectores resultan ser

$$\xi_1 = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.118)$$

$$\xi_2 = -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.119)$$

$$\xi_3 = -\partial_\phi. \quad (2.120)$$

A través de las ecuaciones de Killing se llega al espacio métrico con simetría esférica más general, que es el espacio-tiempo descrito por la ecuación (2.7) [48].

Es posible también estudiar cómo se reflejan algunas de estas simetrías en los campos físicos descritos por el tensor de energía-impulso. Mason y Tsamparlis [49] hacen referencia a esta propiedad, conocida como herencia de simetría. Maartens, Mason y Tsamparlis [50] definen la herencia de simetría a través de la existencia de simetrías conformes si el fluido representado por el tensor de energía-impulso permite la siguiente correspondencia entre las líneas de flujo del fluido

$$\mathcal{L}_\xi u^a = -\psi(x^\mu)u^a + v^a, \quad (2.121)$$

para un vector ξ^a paralelo a la cuadrivelocidad u^a , y donde v^a es un vector tipo-espacio ortogonal a u^a ($v^a u_a = 0$). En [51] se estudian las consecuencias que pueden aparecer sobre la ecuación de estado. Estos estudios muestran una clara vinculación entre simetrías e hidrodinámica.

2.6.1. Simetrías conformes

Existe la posibilidad de extraer soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein bajo la hipótesis adicional de que el espacio-tiempo admite un grupo uniparamétrico de movimientos conformes. Este argumento simplificador ha permitido hallar soluciones en otras circunstancias (Ver: [51] - [54]) y por lo tanto resulta sugestivo considerar esta posibilidad en el caso de fluidos no locales.

Una transformación conforme es una aplicación entre espacios métricos que representa un cambio de escala local. Si \mathcal{M} y $\tilde{\mathcal{M}}$ son dos espacio-tiempos relacionados por una transformación conforme, entonces

$$\tilde{g}_{ab} = e^{\Psi(x^\mu)} g_{ab}. \quad (2.122)$$

Si el espacio-tiempo admite una simetría conforme y si el factor conforme $\Psi(x^\mu)$ es una constante, la transformación (2.122) se conoce con el nombre de transformación de auto-similaridad, o una isometría en el caso en que $\Psi(x^\mu)$ sea igual a cero.

La transformación infinitesimal, $x^a \rightarrow x^a + \xi^a(x^\mu)$, define una Colineación Conforme, si existe un campo vectorial $\xi^a(x^\mu)$ que satisface

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi_{a;b} + \xi_{b;a} = \psi(x^\mu)g_{ab}, \quad (2.123)$$

donde $\psi(x^\mu)$ es una función escalar.

Las ecuaciones (2.123) tienen como solución un conjunto de r vectores $\xi_{(k)}^a(x^\mu)$, con $k = 1, \dots, r$, llamados Vectores de Killing Conformes (VKC), los cuales definen un grupo de simetría o de invariancia r -paramétrico.

En general, los VKC no dejan invariante el tensor de Ricci, pero preservan el tensor de Weyl

$$\mathcal{L}_\xi C^a{}_{bcd} = 0, \quad (2.124)$$

donde:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}(g_{ad}R_{cb} + g_{bc}R_{da} - g_{ac}R_{db} - g_{bd}R_{ca}) + \frac{1}{6}(g_{ac}g_{db} - g_{ad}g_{cb})R. \quad (2.125)$$

En el caso con simetría esférica, es de decir, a partir de (2.7), se puede demostrar que la componente diferente de cero del tensor de Weyl, se puede escribir en términos de $C_{\theta\phi\theta}^\phi$. Esto es:

$$W \equiv \frac{r}{2} C_{\theta\phi\theta}^\phi = \frac{r^3}{6} \left[\left[\dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda} + \ddot{\lambda} \right] e^{-2\nu} + \left[\nu'\lambda' - \nu'' - \nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (2.126)$$

Las ecuaciones (2.124) constituyen el conjunto de condiciones de integrabilidad de las ecuaciones (2.123).

Toda Colineación Conforme debe también satisfacer:

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{bc}^a = \delta_b^a \psi_{;c} + \delta_c^a \psi_{;b} - g_{bc} g^{ad} \psi_{;d}, \quad (2.127)$$

$$\mathcal{L}_\xi R_{ab} = -g_{ab} \square \psi - 2\psi_{;ab}, \quad (2.128)$$

$$\mathcal{L}_\xi R = -6\square \psi - 2\psi R, \quad (2.129)$$

donde \square es el operador laplaciano definido por: $\square \psi \equiv g^{ab} \psi_{;ab}$.

Algunos casos particulares son los siguientes: ξ^a se denomina un Vector de Killing Conforme Especial (VKCE) si $\psi_{;ab} = 0$. Un Vector de Killing Homotécico o una Homotecia (VKH) si $\psi_{;a} = 0$. Un Vector de Killing (VK) si $\psi = 0$.

En cuanto al número de VKC de un espacio métrico se pueden señalar los siguientes teoremas [55]:

Teorema 1 El conjunto de VKC que un espacio-tiempo admite, forma un álgebra de Lie. La dimensión máxima del álgebra para variedades de dimensión n es: $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Cuando este número máximo es alcanzado, el espacio-tiempo se dice que es conformemente plano, o lo que es equivalente a que $C_{bcd}^a = 0$.

Teorema 2 La dimensión máxima del álgebra de Lie de los VKC para un espacio-tiempo que no es conformemente plano es 7.

Capítulo 3

Ecuaciones de estado para materia ultradensa

Nuestro principal problema es el de resolver el sistema representado por las ecuaciones de Einstein dentro de un medio material y, por lo general, se tienen más incógnitas que ecuaciones. Resulta necesario suministrar algún tipo de información adicional sobre la naturaleza del medio material en estudio y la manera más simple de suministrar esta información es a través de una ecuación de estado.

Las ecuaciones de estado son ecuaciones que relacionan variables como la presión y la densidad y, de manera general, pueden ser ecuaciones que expresan de forma explícita propiedades microscópicas del material a través de su estado termodinámico o ecuaciones que expresan las propiedades de la materia a través de su respuesta a interacciones de gran escala como la gravedad, la rotación del fluido o campos electromagnéticos.

Existe una gran incertidumbre en cuanto al conocimiento de una ecuación de estado que permita describir las propiedades de la materia a densidades mayores que la densidad nuclear ($\approx 2,48 \times 10^{14}$ gr/cm³), esto se debe a nuestra incapacidad para verificar los procesos microscópicos de la materia nuclear a densidades tan altas [3]-[7].

Sin embargo, una enorme cantidad de trabajos se han realizado para investigar y proponer ecuaciones de estado de manera tal que se pueden considerar, en términos generales, algunas propiedades importantes de los objetos compactos como lo es la existencia de por lo menos dos regímenes principales de alta densidad. A medida que los nucleones se van confinando dentro del núcleo, todavía la contribución que aportan a la presión total en la estrella es despreciable comparada con la presión ejercida por los electrones degenerados, se va alcanzando una densidad límite en la cual el núcleo comienza a desintegrarse. Cuando se traspasa este umbral en la densidad comienza lo que se llama un “goteo de neutrones” y esto origina la formación de un “gas de neutrones”. La ecuación de estado propuesta por Baym, Pethick y Sutherland, ecuación BPS [56], sugiere que esta densidad crítica ocurre aproximadamente en $\rho_{\text{goteo}} \approx 4 \times 10^{11}$ gm cm⁻³. Este valor permite hacer una distinción entre una ecuación de estado para densidades menores a ρ_{goteo} , que caracteriza el interior de objetos del tipo de las estrellas enanas blancas, y densidades mayores a ρ_{goteo} , que caracteriza el interior de objetos del tipo de las estrellas de neutrones.

Por otro lado, se han desarrollado muchos modelos para describir la materia ultradensa desde aproximaciones no relativistas, esto se ha hecho considerando las interacciones entre nucleones como potenciales que se ajustan a los datos obtenidos del *scattering* para sistemas nucleón-nucleón. Estas teorías, basadas en potenciales para sistemas de muchos cuerpos, tienen el gran problema de que violan la causalidad cuando la velocidad del sonido dentro de la materia alcanza valores mayores a la velocidad de la luz. Sin embargo, logran predecir valores bastante aceptables para la masa máxima de las estrellas de neutrones así como también valores aceptables para sus radios.

Como existe una gran incertidumbre sobre las propiedades de la materia ultradensa, resulta razonable tratar de hacer un estudio de la materia nuclear utilizando todas las herramientas disponibles a través de las leyes físicas y dentro del marco de la teoría de la Relatividad General. La aproximación más simple que se puede hacer para tratar de establecer una ecuación de estado es la de suponer la materia como un gas de fermiones libres: protones, neutrones y electrones que no interactúan entre sí. En este caso, la materia se encuentra en el régimen donde $\rho < \rho_{\text{goteo}}$ y prácticamente lo que se tiene es un gas de electrones. Estos electrones se pueden tratar en la aproximación de un gas ideal de fermiones, como se muestra a continuación.

3.1. El método de la mecánica estadística

Este primer ejercicio para el cálculo de una ecuación de estado para un gas de fermiones permitirá fijar algunas ideas e introducir la notación necesaria para un estudio posterior. En lo que sigue se considera un medio material compuesto de un gas idealizado de protones, neutrones y electrones en equilibrio. El equilibrio es debido al hecho de que el gas ha alcanzado su estado base fundamental: todos los estados cuánticos para los protones y electrones están ocupados, lo que significa que el gas se encuentra en su estado de energía más bajo permitido, el gas se dice que es *degenerado* y a esta energía se le denomina la energía de Fermi. Por otro lado, como el número bariónico es conservado, la densidad bariónica puede ser utilizada como variable independiente en la ecuación de estado, y a pesar de que las diferentes especies de bariones podrán transformarse de alguna manera, también se supondrá que no existe variación en la carga bariónica, es decir, el gas será eléctricamente neutro.

En física estadística la descripción de un gas se realiza definiendo primero que todo un *espacio de fase* de dimensión 6, donde las partículas se caracterizan por sus coordenadas y sus respectivos momentos. En este sentido, es viable definir una función de distribución $f = f(x, p, t)$ que represente el número de partículas, que en un tiempo t , se encuentren dentro de un volumen d^3x y posean un momento dentro del espacio de momento d^3p . Esto significa que si contamos el número de puntos en el elemento de volumen $d^3x d^3p$ el resultado por definición es $f(x, p, t) d^3x d^3p$. Si se quiere cubrir todo el espacio de fase podemos hacer la aproximación

$$\sum f(x, p, t) d^3x d^3p \approx \int f(x, p, t) d^3x d^3p. \quad (3.1)$$

La densidad numérica para cada especie en este espacio de fase se puede escribir como

$$n = \frac{\zeta}{h^3} \int f(x, p, t) d^3p, \quad (3.2)$$

donde h^3 es el volumen de una celda en el espacio de fase ($h = 2\pi\hbar$ es la constante de Plank) y ζ es el número de estados de una partícula para algún valor de momento p dado (peso estadístico). Para fermiones $\zeta = 2$.

Para un gas ideal de Fermi en equilibrio, la función f tiene la forma:

$$f(E) = \frac{1}{e^{[(E-\mu)/kT]} + 1}, \quad (3.3)$$

donde k es la constante de Boltzmann, μ el potencial químico y

$$E = (p^2 + m^2)^{1/2}, \quad m = \text{masa en reposo}. \quad (3.4)$$

El momento p de la partícula y el número de onda k se relacionan, como es sabido, por $p = \hbar k$, pero como estamos utilizando unidades geometrizadas, $\hbar = c = 1$, podemos referirnos a k como el momento.

Para fermiones completamente degenerados la temperatura se considera mucho menor que la energía de Fermi, de manera que $E_F = \mu$

$$T \ll E_F = (k_F^2 + m^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f(E) = \begin{cases} 1 & E \leq E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases}.$$

En este sentido, se puede decir que lo que tenemos es un gas de fermiones a temperatura cero, donde los fermiones ocupan todos los estados posibles con momento $k < k_F$.

La densidad de energía se puede escribir de la siguiente manera

$$\rho = \frac{\zeta}{h^3} \int E f(x, p, t) d^3k. \quad (3.5)$$

La presión isotrópica, o el flujo de momento donde la velocidad es $v = k/E$, viene dada por:

$$P = \frac{\zeta}{3h^3} \int \frac{k^2}{E} f(x, p, t) d^3k. \quad (3.6)$$

Al integrar, en coordenadas esféricas, se obtiene que los fermiones contribuyen a la densidad bariónica, a la densidad de energía y a la presión de la siguiente manera:

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk, \quad (3.7)$$

$$\rho = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} 4\pi (k^2 + m^2)^{1/2} k^2 dk = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + m^2)^{1/2} k^2 dk, \quad (3.8)$$

$$P = \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} 4\pi \frac{k^2}{(k^2 + m^2)^{1/2}} k^2 dk = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + m^2)^{1/2}} dk. \quad (3.9)$$

Las diferentes integrales que aparecen en las ecuaciones anteriores tienen solución analítica, por lo tanto, la ecuación de estado resulta ser:

$$n = \frac{k^3}{3\pi^2}, \quad (3.10)$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu k \left(\mu^2 - \frac{1}{2}m^2 \right) - \frac{1}{2}m^4 \ln \left(\frac{\mu + k}{m} \right) \right], \quad (3.11)$$

$$P = \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu k \left(\mu^2 - \frac{5}{2}m^2 \right) + \frac{3}{2}m^4 \ln \left(\frac{\mu + k}{m} \right) \right], \quad (3.12)$$

donde $\mu = (k_F^2 + m^2)^{1/2}$ es la energía de Fermi o potencial químico y k_F el momento de Fermi. En principio es posible eliminar k_F de las ecuaciones anteriores de manera tal que es posible obtener $\rho(n)$ y $P(n)$.

La ecuación de estado para un gas ideal de Fermi permite dos importantes correcciones, una de ellas es la incorporación del decaimiento beta inverso y la otra debida a interacciones electrostáticas. En BPS se encuentra que al incorporar estas correcciones aparece una densidad crítica a partir de la cual se produce lo que se denomina un *goteo de neutrones*, es decir, los núcleos se desintegran y se forma un *gas de neutrones*. La ecuación de estado BPS sugiere que la densidad a partir de la cual comienza el goteo de neutrones es $\rho_{goteo} \approx 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. Se puede hablar entonces de dos regímenes de alta densidad, en uno ($\rho < 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$) todos los nucleones están confinados y su presión es despreciable a la de los electrones degenerados, y otro ($\rho > 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$) donde la presencia de neutrones libres es tan importante que pasan a suministrar un mayor aporte a la presión que la de los electrones.

3.2. El método de la teoría de campos

En la literatura se puede encontrar una gran cantidad de trabajos donde se desarrollan métodos de teoría de campos para modelar las propiedades de equilibrio de materia ultradensa. Desde el punto de vista de esta teoría, el sistema se describe por bariones que interactúan a través de campos escalares y vectoriales.

En la teoría de campos en lugar de especificar las propiedades de la materia a través de un tensor del tipo $T^{ab}(x^a)$, la descripción se realiza con un conjunto de N objetos $\phi_1(x^a), \phi_2(x^a), \dots, \phi_N(x^a)$. Estos campos son los objetos primarios con los cuales se realiza la descripción cinemática de las propiedades físicas de determinado sistema.

3.2.1. El modelo $\sigma - \omega - \rho$ en la aproximación del campo-medio relativista

En lo que sigue se hace un resumen donde se muestran los pasos más importantes para la determinación de la ecuación de estado para estrellas de neutrones siguiendo el esquema presentado por N. K. Glendenning (ver: [7]).

Consideremos los campos para las siguientes partículas: los nucleones (protones y neutrones), el mesón escalar σ , el mesón vectorial ω y el isovector ρ .

El siguiente lagrangiano será el que describe el sistema

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\lambda, \quad (3.13)$$

donde:

$$\mathcal{L}_B = \sum_B \bar{\psi}_B \left(i\gamma_a \partial^a - m_B + g_{\sigma B} \sigma - g_{\omega B} \gamma_a \omega^a - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_a \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^a \right) \psi_B, \quad (3.14)$$

corresponde a los lagrangianos para los bariones y sus interacciones para los campos σ , ω , $\boldsymbol{\rho}$. La suma se lleva a cabo sobre todas las especies bariónicas B , el octeto bariónico: $p, n, \Lambda, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0, \Xi^-, \Xi^+$. Las constantes de acoplamiento $g_{\sigma B}$, $g_{\omega B}$, $g_{\rho B}$ son cantidades a determinar. El término $\frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_a \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^a$, donde $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ representa la matrices de Pauli, corresponde al lagrangiano para la interacción del campo $\boldsymbol{\rho}$ con el campo isospín de los nucleones.

El siguiente se corresponde al lagrangiano tipo Klein-Gordon para los campos escalares y vectoriales de los mesones σ , ω y sus interacciones con los bariones

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_a \sigma \partial^a \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{ab} \omega^{ab} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_a \omega^a, \quad (3.15)$$

El lagrangiano \mathcal{L}_ρ corresponde al mesón isovector ρ , con las constantes adimensionales, B y C , es:

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4} (\boldsymbol{\rho}_{ab} \cdot \boldsymbol{\rho}^{ab}) + \frac{1}{2} m_\rho^2 (\boldsymbol{\rho}_a \cdot \boldsymbol{\rho}^a) - \frac{1}{3} B m_n (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} C (g_\sigma \sigma)^4. \quad (3.16)$$

Finalmente, el lagrangiano que permite introducir los agentes necesarios para suministrar la neutralidad en la carga del sistema, es decir los leptones (electrones y muones), se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_\lambda = \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_a \partial^a - m_\lambda) \psi_\lambda. \quad (3.17)$$

En la representación de momentos, la ecuación de Dirac para los bariones que se obtiene a partir de (3.13) es:

$$\left[\gamma^a k^a - m_B + g_{\sigma B} \sigma - g_{\omega B} \gamma_a \omega^a - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_a \tau_3 \rho_3^a \right] \psi_B(k) = 0. \quad (3.18)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se derivan de esta teoría se resuelven reemplazando los campos de los mesones por sus valores medios para materia uniforme estática (derivadas espaciales y temporales son despreciadas), y las corrientes para los nucleones, por sus valores esperados, esto significa que se lleva a cabo la siguiente sustitución para los campos de mesones: $\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle$, $\omega_a \rightarrow \langle \omega_a \rangle$ y $\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Esta aproximación, como ya lo hemos mencionado, se denomina aproximación para el campo medio, MFA por sus siglas en inglés (*mean-field approximation*). Las ecuaciones de campo para los mesones quedan

entonces como:

$$m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle = \sum_B g_{\sigma B} \langle \bar{\psi} \psi \rangle - b m_n g_\sigma (g_\sigma \sigma)^2 - c g_\sigma (g_\sigma \sigma)^3, \quad (3.19)$$

$$m_\rho^2 \langle \rho \rangle_{03} = \sum_B g_{\rho B} I_{3B} \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (3.20)$$

$$m_\omega^2 \langle \omega \rangle_0 = \sum_B g_{\omega B} \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (3.21)$$

donde I_{3B} es la componente 3 isospin por barión. La densidad de bariones (componente temporal de la corriente bariónica conservada) se calcula a partir de

$$\rho_b = \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (3.22)$$

y la densidad escalar a partir de

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (3.23)$$

La ecuación de estado se determina a partir del tensor energía y momento canónico

$$\mathcal{T}^{ab} = -g^{ab} \mathcal{L} + \sum_\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi)} \partial^b \phi, \quad (3.24)$$

dando como resultado que la densidad de energía queda como:

$$\begin{aligned} \rho = \langle \mathcal{T}_{00} \rangle &= \frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_B} \sqrt{k^2 + (m_B - g_{\sigma B} \sigma)^2} k^2 dk \\ &+ \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_\lambda} \sqrt{k^2 + m_\lambda^2} k^2 dk, \end{aligned} \quad (3.25)$$

y la presión isotrópica:

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{3} \langle \mathcal{T}_{ii} \rangle &= -\frac{1}{3} b m_n (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ &+ \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_B} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (m_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}} \\ &+ \frac{1}{3} \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_\lambda} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La densidad de masa-energía y la presión son funciones de la densidad bariónica a través del momento de Fermi k_B para cada especie. Cuando las soluciones de las ecuaciones anteriores (las cuales deben incluir también las condiciones para la neutralidad de la carga y el equilibrio químico) son obtenidas, es posible obtener una ecuación de estado de la forma $P = P(\rho)$, o la inversa $\rho = \rho(P)$.

Las ecuaciones para la estructura estelar, las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, nos proveen una familia 1-paramétrica de modelos estelares. La integración numérica de estas ecuaciones se lleva a cabo hasta que la presión se hace cero para algún punto particular de la coordenada radial $r = r_s$. Este valor de la coordenada radial indica el borde exterior de la estrella y la masa total $M = M(r_s)$. Por otro lado, al escoger diferentes valores para la densidad central se puede determinar la masa límite permitida para una configuración de materia estable.

En 1985, Glendenenning [57] hace una extensión del formalismo anterior para obtener una ecuación de estado de estrellas de hiperones. Estas estrellas son objetos en donde los nucleones se convierten en hiperones, se estima que la población de hiperones alcanza entre un 15% – 20% del total de bariones constituyentes del núcleo estelar.

Debido a los enormes esfuerzos computacionales para incluir diferentes combinaciones de densidades y temperaturas, resulta de gran interés estudiar la posibilidad de considerar ecuaciones de estado analíticas. Tales ecuaciones de estado son una herramienta efectiva porque permiten realizar simulaciones hidrodinámicas de manera rápida y su grado de aproximación a los modelos numéricos más complejos se hace, por lo general, realizando un ajuste sobre los parámetros que se incorporan en estos modelos analíticos.

En la siguiente sección se presentará y se discutirá la aproximación que se llevará a cabo es este trabajo con el fin de estudiar la materia ultradensa, se propondrá una ecuación de estado analítica dentro del marco de la teoría de la Relatividad General. Por otra parte, una aplicación de esta aproximación analítica utilizando el formalismo del campo-medio relativista anteriormente expuesto, se considerará en el capítulo 4.

3.3. Un método analítico: Ecuación de Estado no Local

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la teoría de la Relatividad General contienen un conjunto de consideraciones geométricas que tienen que ver con la estructura del espacio-tiempo, estas consideraciones geométricas se basan en la idea de que el espacio y el tiempo se pueden representar por una variedad riemanniana y la interacción fundamental que existe entre la materia y la gravitación. La relación curvatura del espacio-tiempo y materia se encuentra contenida en las famosas ecuaciones de Einstein, y desde un punto de vista puramente matemático el problema se reduce al de encontrar el mayor número posible de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein.

Las soluciones exactas permiten establecer un camino para el entendimiento y descubrimiento de fenómenos relativistas, siendo una base conveniente para desarrollar métodos perturbativos. También son una buena referencia para la verificación de soluciones numéricas.

Por otra parte, uno de los fenómenos astrofísicos más estudiados es el que tiene que ver con la dinámica del colapso gravitacional. Al colapsar un objeto ultradenso se producen en su interior una serie de efectos termodinámicos por el hecho de que el núcleo se vuelve opaco al flujo de los neutrinos, trayendo como consecuencia una reducción considerable de la luminosidad de la estrella. Para lograr una posible termalización, que posteriormente lleve a la estrella a un nuevo estado de equilibrio, deben ocurrir en el interior del núcleo de la estrella diferentes procesos de emisión térmica y de neutronización. Esta mezcla tan particular de

radiación y materia da origen a efectos viscosos, ya que se produce un intercambio de momento entre las diferentes capas del material, incrementando inevitablemente la anisotropía de la estrella.

A medida que el proceso de colapso avanza y la materia se hace más densa, es posible que la densidad exceda de manera significativa la densidad nuclear de $\rho_0 \approx 2,0 \times 10^{14}$ gr cm^{-3} , el conocimiento de su estructura y su composición se hace cada vez más incierta. El cálculo de la ecuación de estado a densidades $\rho > 2\rho_0$, lo que se conoce como el núcleo interior de la estrella, se convierte en prácticamente un desafío intelectual y únicamente una aproximación teórica es posible ya que un escenario con estas características es irreproducible en un laboratorio terrestre. Las dificultades para obtener una ecuación de estado son muchas, ya que se necesita poder resolver el problema de muchos cuerpos para un sistema muy denso con interacciones fuertes.

En 1939 Oppenheimer y Volkoff (y simultáneamente Tolman) calcularon por primera vez un modelo de estrellas de neutrones usando una solución exacta de las ecuaciones de equilibrio hidrostático en Relatividad General. Para tal fin, consideraron la ecuación de estado de un gas de Fermi de neutrones a temperatura cero para obtener una masa máxima de $0,71M_\odot$. Esta masa límite no era ni la mitad de la masa de Chandrasekhar para estrellas del tipo de las enanas blancas.

El interés principal de este trabajo tiene que ver con la posibilidad de establecer una descripción para un medio material ultradenso desde un punto de vista netamente analítico, es decir, sin recurrir a métodos numéricos en la medida de lo posible. Este punto de vista permitirá el desarrollo de modelos de estrellas de neutrones e incluso seguir la evolución de posibles escenarios de colapso gravitacional. Básicamente, el método consiste en suministrar *ad hoc* una ecuación de estado algebraica que presupone una relación simple entre las variables macroscópicas, como la densidad y presión.

La ecuación de estado no local que se propone es la siguiente:

$$P = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \left[\frac{\rho + 2q\omega + P\omega^2}{1 - \omega^2} \right] d\bar{r}. \quad (3.27)$$

A diferencia de la ecuación (1.1), la ecuación (3.27) es una generalización para el caso dinámico, es decir, el fluido puede ser considerado como un medio material esférico que puede radiar energía a medida que colapsa. El término de No Local tiene que ver con el hecho de que en la ecuación (3.27) existe un comportamiento que considera el efecto colectivo de las variables físicas $\rho(r, t)$, $P(r, t)$, $q(r, t)$, $\omega(r, t)$ sobre toda la distribución de materia. Esto significa que la presión radial P no sólo es una función de la densidad de masa-energía en un punto, sino que existe un efecto adicional por medio de un funcional que toma en cuenta las otras variables, incluyendo la misma presión, a través de toda la distribución de materia. Esto hace que (3.27) no sea una ecuación de estado tradicional, en el sentido de que la presión sea únicamente función de la densidad, en este caso, (3.27) podría ser denominada una ecuación de estado integral. Cuando se considera estaticidad ($\omega = 0$), (3.27) sí resulta en una ecuación de estado del tipo $P = P(\rho)$:

$$P = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \rho \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (3.28)$$

Ahora bien, se puede obtener una mayor comprensión física del significado de la no localidad en la ecuación (3.28) si ésta se reescribe de la siguiente forma:

$$P(r) = \rho(r) - \frac{2}{3} \langle \rho \rangle_r, \quad \text{con} \quad \langle \rho \rangle_r = \frac{\int_0^r 4\pi \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}}{\frac{4\pi}{3} r^3} = \frac{M(r)}{V(r)}. \quad (3.29)$$

Claramente, el término no local representa la función densidad promedio $\langle \rho \rangle_r$ sobre el volumen contenido dentro de una esfera de radio r . Adicionalmente, la ecuación (3.29) también puede escribirse como

$$P(r) = \frac{1}{3} \rho(r) + \frac{2}{3} [\rho(r) - \langle \rho(r) \rangle] = \frac{1}{3} \rho(r) + \frac{2}{3} \sigma_\rho, \quad (3.30)$$

donde se ha utilizado el concepto estadístico de desviación estándar, σ_ρ , para el valor local de la densidad de energía. Además, esta última ecuación se puede escribir de la manera que se muestra a continuación.

$$P(r) = \mathcal{P}(r) + 2\sigma_{\mathcal{P}(r)} \quad \text{donde:} \quad \begin{cases} \mathcal{P}(r) = \frac{1}{3} \rho(r) & \text{y} \\ \sigma_{\mathcal{P}(r)} = \left(\frac{1}{3} \rho(r) - \frac{1}{3} \langle \rho \rangle_r \right) = (\mathcal{P}(r) - \bar{\mathcal{P}}(r)) \end{cases} \quad (3.31)$$

Si en un punto particular dentro de la distribución, el valor de la densidad $\rho(r)$ se aproxima a su valor promedio $\langle \rho(r) \rangle$, la ecuación de estado para la materia se comporta de manera similar a la ecuación para un medio dominado por radiación: $P(r) \approx \mathcal{P}(r) \equiv \frac{1}{3} \rho(r)$.

Por otro lado, es fácil notar que la ecuación (3.27) se puede reescribir como una ecuación diferencial:

$$\rho - 3P + r(\rho' - P') - 4\omega q - [3\rho - P + r(\rho' - P')] \omega^2 = 0. \quad (3.32)$$

Utilizando las ecuaciones de campo (2.51)-(2.52) esta última queda de la siguiente forma:

$$\left[\mathbf{T}_0^0 + 3\mathbf{T}_1^1 + r(\mathbf{T}_0^0 + \mathbf{T}_1^1)' \right] (1 - \omega^2) = 0, \quad (3.33)$$

ecuación que se puede escribir, gracias a las ecuaciones de Einstein, como

$$\left[\mathbf{G}_0^0 + 3\mathbf{G}_1^1 + r(\mathbf{G}_0^0 + \mathbf{G}_1^1)' \right] (1 - \omega^2) = 0. \quad (3.34)$$

Al introducir el elemento métrico (2.7) en (3.34) se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$2(\lambda' - \nu') + r \left(2\lambda'\nu' - 2(\lambda')^2 + \lambda'' - \nu'' \right) = 0, \quad (3.35)$$

que puede integrarse formalmente para dar

$$\nu = \lambda + \kappa(t), \quad (3.36)$$

donde $\kappa(t)$ es una función arbitraria.

Con esta información el elemento métrico (2.7) queda de la siguiente forma:

$$ds^2 = e^{2\lambda} e^{2\kappa} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.37)$$

Es claro que al proponer la ecuación de estado no local (3.27) se logra suprimir una de las funciones métricas, como se puede ver en (3.36).

La evolución del colapso se obtiene directamente de las ecuaciones del campo gravitatorio, que ahora resultan ser:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[2\lambda' - \frac{1}{r} \right] = 8\pi \left[\frac{\rho + \omega^2 P + 2\omega q}{1 - \omega^2} \right], \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[2\lambda' + \frac{1}{r} \right] = -8\pi \left[\frac{P + \omega^2 \rho + 2\omega q}{1 - \omega^2} \right], \quad (3.39)$$

$$\frac{2\dot{\lambda}}{r} = -8\pi \left[\frac{\omega(\rho + P) + q(1 + \omega^2)}{1 - \omega^2} \right] e^{(2\lambda + \kappa)}, \quad (3.40)$$

$$\left[(\ddot{\lambda} - \dot{\kappa}\dot{\lambda}) e^{-2\kappa} - \lambda'' \right] e^{-2\lambda} = -8\pi P_{\perp}. \quad (3.41)$$

O si lo preferimos, y de manera equivalente, por las ecuaciones (2.55)-(2.58):

$$\rho = \frac{e^{-2\lambda} \left[(2r\lambda' - e^{2\lambda} + 1) \omega^2 - 1 + 2r\lambda' - 4r\omega\dot{\lambda}e^{-\kappa} \right] + 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)}, \quad (3.42)$$

$$P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad (3.43)$$

$$q = -\frac{\omega}{1 + \omega^2} (\rho + P) - \left(\frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \right) \frac{\dot{\lambda} e^{-(2\lambda + \kappa)}}{4\pi r}, \quad (3.44)$$

$$P_{\perp} = -\frac{e^{-2\lambda}}{8\pi} \left[(\ddot{\lambda} - \dot{\kappa}\dot{\lambda}) e^{-2\kappa} - \lambda'' \right]. \quad (3.45)$$

Es fácil ver que a partir de (3.43) se puede despejar la función masa

$$m(t, r) = \frac{r}{2} [1 - e^{-2\lambda}] = 2\pi r^3 (\rho - P). \quad (3.46)$$

Por otra parte, de las condiciones de acoplamiento es claro que la condición sobre el único elemento métrico libre que queda es:

$$\kappa = -2\lambda_s. \quad (3.47)$$

Esto significa que la función $\kappa(t)$ se encuentra íntimamente ligada al potencial gravitacional en la superficie de la estrella:

$$e^{\kappa} = 1 - \frac{2M(t)}{r_s(t)}. \quad (3.48)$$

De la definición de la velocidad en coordenadas de Schwarzschild (2.42) se obtiene que para una situación de colapso, con una **EENL**, resulta la siguiente relación en la superficie:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_s \equiv \dot{r}_s = \omega_s e^{\kappa}. \quad (3.49)$$

Otra característica importante, y que se verá con más detalle en los próximos capítulos, tiene que ver con el hecho de que los modelos obtenidos al imponer una **EENL** resultan ser de naturaleza anisótropa en la presión, es decir, $P_{\perp} \neq P$.

Es bueno acotar que en el centro de simetría se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{2\lambda} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} e^{2\nu} = e^{2\kappa}. \quad (3.50)$$

Por la ecuación (3.32) evaluada en $r = 0$, donde $\rho(0) \equiv \rho_c$ y $P(0) \equiv P_c$, resulta la siguiente relación entre la densidad central y la presión central.

$$\rho_c = 3P_c. \quad (3.51)$$

Esto significa que en el centro la materia se comporta igual que un gas de Fermi relativista.

En los siguientes capítulos se estudiará el grado de aceptabilidad física de un medio material altamente compacto cuando es representado por una **EENL**. En primer lugar, se estudiará el caso estático para considerar la posibilidad de generar soluciones de las ecuaciones de Einstein, y en segundo lugar, construyendo modelos para posibles escenarios de colapso gravitacional. Algunas consideraciones simplificadoras serán tomadas en cuenta, como la condición de que el fluido sea conformemente plano o que el espacio-tiempo admita un grupo uniparamétrico de movimientos conformes.

Capítulo 4

Soluciones exactas estáticas con una EENL

Aún en las situaciones más simples: simetría esférica, caso estático y fluido perfecto, no son muchas las soluciones exactas conocidas, y son pocas las que logran pasar las pruebas más elementales que tienen que ver con su relevancia o condiciones de aceptabilidad física. En un comienzo solo un número pequeño de soluciones exactas fueron discutidas, y surgieron de problemas físicos altamente idealizados. Así aparecieron las soluciones de: Schwarzschild, Reissner y Nordström, Tolman, Friemann, Weyl y Kerr.

En cuanto a las técnicas más utilizadas para buscar soluciones exactas se pueden señalar: el uso de campos vectoriales y sus invariantes, la clasificación algebraica del tensor de Weyl (los tipos de Petrov), el método de las tétradas (las nuladas de Newman y Penrose) y la clasificación del tensor de Ricci libre de traza (notación de Segre y Plebański).

Es importante considerar el hecho de que las soluciones de las ecuaciones de Einstein deben ser regulares en el centro de simetría de la distribución, y esto requiere abordar el problema de existencia y unicidad a partir de un análisis técnico sobre ecuaciones diferenciales singulares. Rendall y Schmidt [58] muestran que dada una ecuación de estado y un valor de la presión central, existe entonces una única solución global de las ecuaciones de Einstein que representan un fluido estático con simetría esférica.

En este capítulo se desarrolla un método para obtener soluciones exactas, estáticas, anisótropas, con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein. El método consiste en tomar un perfil de densidad de una solución exacta conocida y a partir de ella generar soluciones estáticas no locales. La solución utilizada como “ecuación semilla” no tiene que corresponder necesariamente con una solución para un fluido imperfecto, es decir, se tomarán de la literatura algunas soluciones tanto para fluidos perfectos y no perfectos.

Esta forma algorítmica de generar soluciones a partir de la introducción de una función conocida ha sido ampliamente utilizada en los últimos años, incluso, existe toda una colección de técnicas para generar soluciones basadas en esta estrategia [59]. En el caso de fluidos anisótropos, por lo general, se requieren dos funciones “semilla” como funciones de entrada para el algoritmo, sin embargo, en el método propuesto en este trabajo únicamente se necesita suministrar una función de entrada. Debe quedar claro que si la función “semilla”

se corresponde a una solución de las ecuaciones de Einstein que se considera físicamente aceptable, porque es regular y satisface las condiciones de energía, difícilmente el algoritmo garantiza que las funciones obtenidas sean razonables desde el punto de vista físico.

En el caso estático, el elemento métrico (3.37) resulta ser el siguiente

$$ds^2 = e^{2\lambda} e^{2\kappa} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde $\lambda = \lambda(r)$ y κ es una constante.

Considerar el caso no dependiente del tiempo implica que la ecuación de estado propuesta (3.27) se reduce a una expresión con la siguiente forma:

$$P(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}. \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de campo, que resultan del hecho de imponer la condición de no localidad son:

$$\rho = \frac{1 - e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda')}{8\pi r^2}, \quad (4.3)$$

$$P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad (4.4)$$

$$P_{\perp} = \frac{\lambda'' e^{-2\lambda}}{8\pi}. \quad (4.5)$$

donde

$$m(r) = 2\pi r^3 (\rho - P). \quad (4.6)$$

De la divergencia del tensor de energía-impulso $\mathbf{T}^{1a}{}_{;a} = 0$ se obtiene:

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \right) + \frac{2}{r} (P_{\perp} - P). \quad (4.7)$$

Es claro que en el caso isótropo, $P_{\perp} = P$, esta última ecuación es la ecuación usual de equilibrio hidrostático, conocida también como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV). Ha sido establecido [58]-[61] el hecho de que existe una única solución global a (4.7) que representa un fluido esféricamente simétrico en Relatividad General.

Es fácil ver que al derivar (4.2) y con la ayuda de la ecuación (4.6) se obtiene una ecuación para la presión tangencial

$$P_{\perp} = \frac{(r\rho)'}{2} - \frac{P}{2} + \frac{\pi r^2 (\rho + P)^2}{1 - 4\pi r^2 (\rho - P)}. \quad (4.8)$$

Por otro lado, a partir de (4.4) y (4.5) se tiene que la condición para fluido perfecto resulta ser:

$$P_{\perp} = P \quad \Rightarrow \quad \lambda'' r^2 - 2r\lambda' - 1 + e^{2\lambda} = 0, \quad (4.9)$$

lo que implica que en $r = 0$ se cumple que $P_c = P_{\perp c}$.

4.1. Sobre las condiciones de energía

Haciendo uso de excesivas suposiciones simplificadoras se ha obtenido una enorme cantidad de soluciones a la ecuación diferencial (4.7), pero muchas de estas soluciones raramente representan situaciones físicas reales, es decir, son poco creíbles físicamente (dos interesantes artículos sobre este tema son [62] y [63]). En lo que sigue, vamos a estudiar las condiciones de energía para fluidos anisótropos y acotados con el fin de establecer las condiciones mínimas de aceptabilidad física para diferentes soluciones estáticas, con la imposición adicional de (4.2).

Al considerar configuraciones de materia finitas, es decir, distribuciones de materia aisladas en el sentido de que la presión se hace cero para algún valor finito del radio, es necesario acoplar la solución interior (4.1) con la solución exterior de Schwarzschild para una distribución de masa total M

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.10)$$

Como se mostró en el Capítulo 2, de las condiciones de acoplamiento resulta que la presión radial debe hacerse cero para algún valor del radio $r = R$. En el caso estático: $P(R) = 0$ y $m(R) = M$. De la condición $P_s \equiv P(R) = 0$ y de (4.6) es claro que: $M = 2\pi R^3 \rho_s$, donde $\rho_s = \rho(R)$.

Puede resultar conveniente escribir (4.3) - (4.5) en términos de la función masa, esto es:

$$4\pi \rho = \frac{m'}{r^2}, \quad (4.11)$$

$$4\pi P = \frac{m'}{r^2} - \frac{2m}{r^3}, \quad (4.12)$$

$$8\pi P_{\perp} = \frac{m''}{r} + \frac{2(m'r - m)}{r^3} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (4.13)$$

Es necesario que el elemento métrico $m(r)$ sea siempre finito, diferente de cero dentro de la configuración de materia y que tampoco cambie de signo. Esto implica que:

$$m(r) \leq \frac{r}{2} \quad \forall r. \quad (4.14)$$

Se ha demostrado [61] que para configuraciones de materia esféricas, estáticas y acotadas la condición: $\rho + P + 2 P_{\perp} \geq 0$ implica la condición anterior (4.14). Esta condición claramente asegura que el espacio-tiempo interior no contenga una región de agujero negro.

A continuación se establecen las condiciones de aceptabilidad física para fluidos anisótropos, como en la sección (2.5), pero ahora escritas en términos de la función masa.

1. La densidad debe ser definida positiva y su gradiente debe ser negativo en toda la distribución de materia. De manera trivial, de la ecuación (4.6) y de su derivada se obtiene

$$\rho > 0 \quad \Rightarrow \quad m' > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} < 0 \quad \Rightarrow \quad m'' < \frac{2m'}{r}. \quad (4.15)$$

2. Las presiones radial y tangencial deben ser positivas. Por lo tanto, las ecuaciones (4.12) y (4.13), conducen a

$$P \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m' \geq \frac{2m}{r} \quad \text{y} \quad (4.16)$$

$$P_{\perp} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m'' \geq -\frac{2(m'r - m)}{r^2} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (4.17)$$

3. El gradiente de la presión radial debe ser negativo. Esto es, derivando (4.12) se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial r} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad m'' \leq \frac{4m'}{r} - \frac{6m}{r^2}. \quad (4.18)$$

4. La velocidad del sonido debe ser menor que la velocidad de la luz, por lo tanto, de (4.2) resulta

$$v_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\rho - 3P)}{r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)} \leq 0. \quad (4.19)$$

Debido al hecho de que el gradiente de la densidad debe ser negativo dentro de la esfera de materia, el requisito de que la velocidad del sonido sea menor que c conduce a que $\rho > 3P$, tanto para fluidos isótropos y anisótropos que contengan una **EENL**.

Además de las condiciones anteriores, también se deben satisfacer las Condiciones de Energía Fuerte y las Condiciones de Energía Dominante, como se muestra a continuación:

1. La traza del tensor energía-momento debe ser positiva: $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$. Lo que implica que de la Condición de Energía Fuerte, de las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13) resulta lo siguiente:

$$\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m'' \geq -\frac{2m'}{r} + \frac{2m}{r^2} - \frac{2(m'r - m)}{r^2} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (4.20)$$

La Condición de Energía Fuerte también implica que: $\rho + P \geq 0$ y $\rho + P_{\perp} \geq 0$, esto significa que se deben satisfacer de manera simultánea las siguientes condiciones

$$\rho + P \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m' \geq \frac{m}{r} \quad \text{y} \quad (4.21)$$

$$\rho + P_{\perp} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m'' \geq -\frac{2m'}{r} - \frac{2(m'r - m)}{r^2} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (4.22)$$

2. La Condición de Energía Dominante declara que la densidad debe ser mayor que la presión. Utilizando las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13) se obtiene

$$\rho \geq P \quad \Rightarrow \quad m \geq 0 \quad \text{y} \quad (4.23)$$

$$\rho \geq P_{\perp} \quad \Rightarrow \quad m'' \leq \frac{2m'}{r} - \frac{2(m'r - m)}{r^2} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (4.24)$$

4.2. Método para obtener soluciones estáticas con una EENL

En esta sección presentaremos un método general para obtener soluciones estáticas y anisótropas, $P \neq P_{\perp}$, a partir de perfiles de densidades conocidos. Básicamente el método consiste en los pasos que se muestran a continuación:

1. Se selecciona un perfil de densidad $\rho(r)$ de una solución estática conocida. Entonces, a partir de este perfil de densidad la función masa puede ser obtenida a través de la ecuación:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (4.25)$$

Las condiciones de contorno implican la continuidad de las funciones que aparecen en el elemento métrico, lo que permite que la masa total $m(R) = M$ pueda ser calculada.

2. Se comprueba dónde y bajo qué circunstancias todas las condiciones de aceptabilidad física y de energía, escritas en términos de la función masa, son satisfechas. En otras palabras, la función masa obtenida a partir del perfil de densidad debe satisfacer las desigualdades (4.14) - (4.24) para valores particulares de los parámetros físicos que caracterizan la configuración.
3. El coeficiente métrico $\lambda(r)$ puede ser fácilmente obtenido a partir de:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]. \quad (4.26)$$

La segunda función métrica $\nu(r)$ queda automáticamente determinada por

$$\nu = \lambda + \kappa, \quad (4.27)$$

donde la constante κ es:

$$\kappa = \ln \left[1 - \frac{2M}{R} \right]. \quad (4.28)$$

4. Finalmente, las ecuaciones de Einstein (4.12) y (4.13) nos suministran las expresiones para la presión radial y tangencial

$$P = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m'}{r^2} - \frac{2m}{r^3} \right], \quad (4.29)$$

$$P_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{m''}{r} + \frac{2(m'r - m)}{r^3} \left(\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right) \right]. \quad (4.30)$$

5. Las diferentes constantes de integración o parámetros libres que puedan aparecer para cada modelo en particular, se calculan a partir de las condiciones de acoplamiento en la superficie: $r = R$, es decir, $m(R) = M$ y $P(R) = 0$.

Es importante recalcar el hecho de que para modelos no locales siempre se cumple, por un lado, que en el centro de simetría $\rho_c = 3P_c$, esto significa el medio material, no presenta singularidades en esa región, y por el otro, los modelos con una **EENL** son de naturaleza anisótropa para la presión.

Con el fin de aplicar el método anterior se tomarán de la literatura cinco perfiles de densidades de soluciones estáticas conocidas (soluciones semillas). Las dos primeras corresponden a soluciones anisótropas y las siguientes a soluciones para fluidos perfectos. Todas estas soluciones son físicamente aceptables según los criterios mencionados anteriormente.

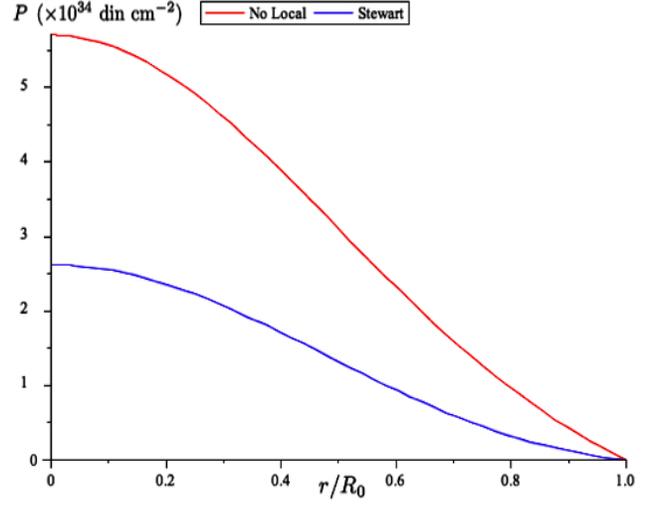


Figura 4.1: Presión vs r : la solución original de Stewart (azul), y la solución no local (rojo).

4.2.1. Ejemplos de soluciones estáticas

Ejemplo 1: El primer ejemplo que vamos a considerar es tomado de la solución propuesta por B. W. Stewart [64], para describir configuraciones anisótropas conformemente planas. El ejemplo 2 de ese trabajo consiste en presentar la siguiente distribución de masa: (lamentablemente el autor no cita ninguna fuente)

$$2m(r) = r \tanh^2(Kr), \quad (4.31)$$

donde K es una constante. La presión radial para este ejemplo resulta ser:

$$P_r = \frac{4c \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{2(cr^2 - be^{2\varphi})}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}\right)}{cr^2 + be^{2\varphi}} - \frac{2m}{r^3}, \quad (4.32)$$

y la presión tangencial se obtiene a partir de

$$\Delta \equiv P_{\perp} - P_r = -r \left(\frac{2m}{r^3}\right)'. \quad (4.33)$$

Las constantes c y b se determinan por las condiciones de contorno y la función φ integrando:

$$\varphi' = r^{-1} - (r^2 - 2mr)^{-1/2}. \quad (4.34)$$

Para la función masa (4.31) se tiene que según [64] una solución de la ecuación (4.34) es:

$$\varphi = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Kr)^{2n}}{2n(2n)!}, \quad (4.35)$$

La densidad de masa-energía que corresponde a esta función masa se obtiene integrando (4.11), lo cual resulta en lo siguiente:

$$\rho = \frac{\tanh^2(Kr)}{r^2} + \frac{2K \tanh(Kr) \operatorname{sech}^2(Kr)}{r},$$

con la subsecuente restricción para el valor de la constante K :

$$KR \lesssim 1,76.$$

Si la constante K toma valores muy cercanos a cero, esta solución difiere ligeramente de una solución con densidad constante [64]. La solución por series de la ecuación diferencial (4.34) también se puede escribir de la manera como se muestra a continuación:

$$\varphi = -\operatorname{Chi}(Kr) + \ln(Kr) + \gamma, \quad (4.36)$$

donde Chi es el Coseno Integral Hiperbólico y γ la constante de Euler.

Para aplicar el algoritmo anteriormente expuesto, preferiblemente se reescribe la función masa (4.31) de la manera equivalente siguiente:

$$m = \frac{r}{2} \left(\frac{e^{2Kr} - 1}{e^{2Kr} + 1} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(e^{4Kr} + 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}. \quad (4.37)$$

Por lo tanto, la presión radial y la presión tangencial para el caso de la teoría no local, ecuaciones (4.29) y (4.30), son respectivamente:

$$P = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(1 - e^{2Kr})(e^{4kr} - 8Kre^{2Kr} - 1)}{(1 + e^{2Kr})^3} \quad \text{y} \quad P_{\perp} = \frac{2K^2 e^{4Kr}}{\pi [1 + e^{2Kr}]^4}. \quad (4.38)$$

La constante K se puede determinar a partir de la condición de contorno $M = m(R)$:

$$K = \frac{1}{2R} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (4.39)$$

como la presión debe ser cero en la superficie $P(R) = 0$ entonces se debe cumplir la siguiente ecuación trascendental:

$$e^{4KR} - 8KR e^{2KR} - 1 = 0. \quad (4.40)$$

En la Figura 4.1 se muestran los perfiles de presión tanto para el modelo original del ejemplo 2 de Stewart como para el modelo no local.

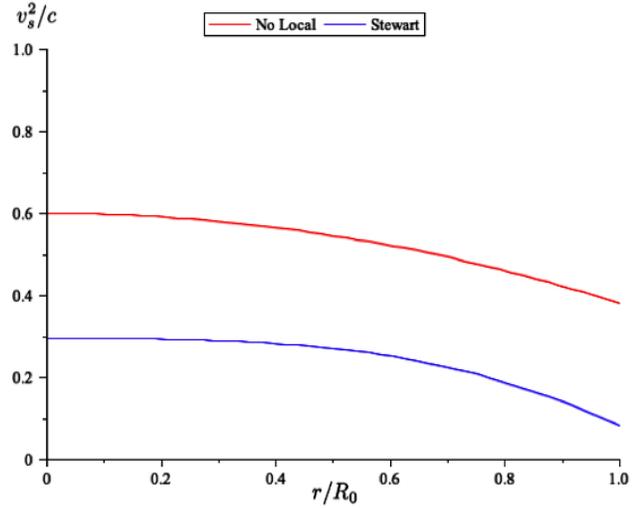


Figura 4.2: Velocidad del sonido radial al cuadrado para la solución original (Stewart) y la solución no local en función de r .

Es fácil ver que la densidad es una cantidad finita en el centro

$$\rho_c = \frac{3K^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi R^2} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]^2. \quad (4.41)$$

En cuanto a las velocidades del sonido se tiene que en el centro de la distribución:

$$v_s^2|_c = v_{s\perp}^2|_c = \frac{3}{5}. \quad (4.42)$$

Se puede apreciar en la Figura 4.2 que la velocidad del sonido radial en la esfera descrita por la ecuación de estado no local, es siempre mayor que la velocidad del sonido para la esfera descrita por la ecuación de estado local, esto se podría interpretar físicamente diciendo que la esfera no local es más rígida que la local.

Ejemplo 2: El perfil de densidad de este segundo ejemplo es tomado de P.S. Florides [65], que también corresponde a diferentes soluciones: la de Stewart [64] (ejemplo 4) y más recientemente M. K. Gokhroo y A. L. Mehra [66]. La solución de Gokhroo-Mehra, bajo circunstancias particulares [67], da origen a una ecuación de estado similar a la ecuación newtoniana para materia nuclear de Bethe-Börner-Sato [3, 4, 68]. Es bueno acotar que estas soluciones son equivalentes a las soluciones del tipo Tolman VII donde $e^{-2\lambda} = 1 - Ar^2 + Br^4$.

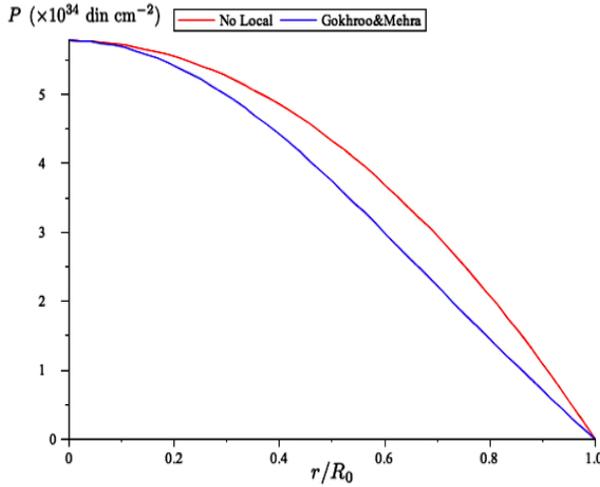


Figura 4.3: Perfiles de presión: la solución original (Gokhroo-Mehra en azul), y la solución no local, para diferentes valores de r .

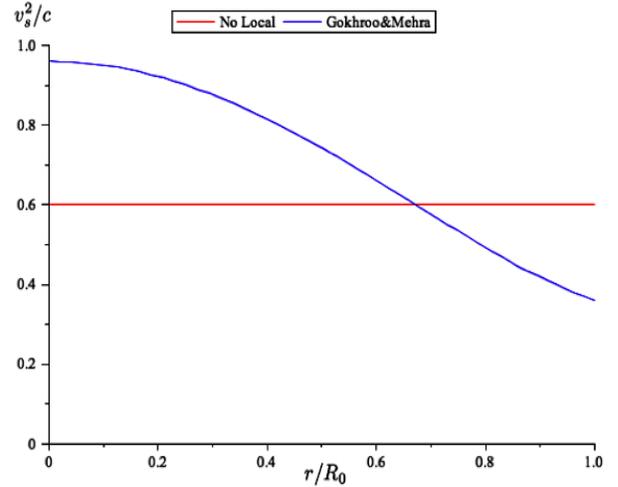


Figura 4.4: Velocidad del sonido radial al cuadrado para la solución original (Gokhroo-Mehra en azul) y la solución no local en función de r .

En [66] la función densidad-energía se toma como

$$\rho = \rho_0 \left[1 - K \frac{r^2}{R^2} \right] \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{8\pi\rho_0 r^3}{6} \left[1 - \frac{3K}{5} \frac{r^2}{R^2} \right], \quad (4.43)$$

donde ρ_0 es la densidad central y K es una constante arbitraria que puede tomar valores comprendidos entre cero y uno.

Las expresiones para la presión radial y tangencial según [66] son las siguientes:

$$P_r = C \Xi \Pi^n, \quad (4.44)$$

$$P_\perp = P_r + \frac{3KC\alpha r^4}{10R^2} \Pi^n + \frac{r^2}{2\Xi} \left[\frac{8\pi C^2}{2} \Xi^2 \Pi^{2n} - \frac{2\pi C}{R^2} \Xi^2 \Pi^{n-1} + \frac{\rho_0 m}{r^3} \left(1 - \frac{Kr^2}{R^2} \right) \right], \quad (4.45)$$

donde $\alpha = 8\pi\rho_0/3$, C la presión central y $n \geq 1$. Con:

$$\Xi = 1 - \frac{2m}{r}, \quad \text{y} \quad \Pi = 1 - \frac{r^2}{R^2}.$$

Estas últimas variables no aparecen en el artículo original y son introducidas aquí para simplificar los cálculos.

Para aplicar nuestro algoritmo y obtener soluciones no locales a partir de densidades conocidas, vamos a considerar que la función densidad-energía es de la forma (4.43):

$$\rho = \frac{\sigma}{8\pi} \left[1 - K \frac{r^2}{R^2} \right], \quad (4.46)$$

por lo tanto:

$$m = \frac{\sigma r^3}{6} \left[1 - \frac{3K}{5} \frac{r^2}{R^2} \right]. \quad (4.47)$$

Aquí σ y K son constantes ($0 \leq K \leq 1$) y la densidad central $\rho_c = \frac{\sigma}{8\pi}$.

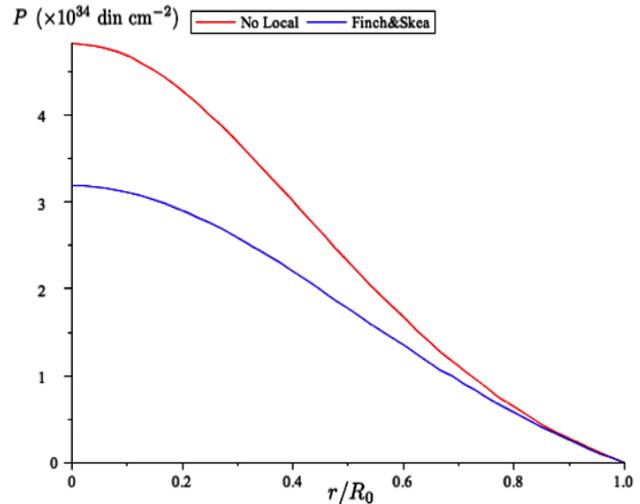


Figura 4.5: Presión vs r : la solución original (Finch-Skea en rojo), y la solución no local.

La presión radial (Figura 4.3) y tangencial, no locales, quedan entonces como:

$$P = \frac{\sigma}{24\pi} \left[1 - \frac{9Kr^2}{5R^2} \right] \quad \text{y} \quad (4.48)$$

$$P_\perp = \frac{\sigma}{120\pi R^2} \frac{18\sigma K^2 r^6 - 15R^2 r^2 K (18 + \sigma r^2) + 25R^4 (3 + \sigma r^2)}{5R^2 (3 - \sigma r^2) + 3\sigma K r^4}. \quad (4.49)$$

Las condiciones de contorno en la superficie $r = R$, es decir: $P(R) = 0$ y $M = m(R)$, conducen a que:

$$K = \frac{5}{9} \quad \text{y} \quad \rho_c = \frac{9M}{8\pi R^3}. \quad (4.50)$$

Las expresiones para las velocidades del sonido que resultan son:

$$v_s^2 = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad v_{s\perp}^2 = \frac{6R - 3M}{5R}. \quad (4.51)$$

A diferencia del caso anterior, el modelo no local es más rígido que el local pero únicamente en las zonas más interiores de la esfera, ver Figura 4.4.

Esta solución permite que a partir de las expresiones para la densidad y presión radial, ecuaciones (4.46) y (4.48), se pueda escribir una ecuación de estado de la forma $P = P(\rho)$, esto es:

$$P = \frac{3}{5} \left[\rho - \frac{4}{9} \rho_c \right]. \quad (4.52)$$

Ejemplo 3: Otra solución a estudiar es la solución para fluidos perfectos presentada por Finch-Skea [69]. Los autores muestran la solución correcta de un *ansatz* propuesto por Duorah y Ray (1987). Esta solución también es una generalización de la solución mostrada por Durgapal y Bannerji en [70].

El perfil de densidad correspondiente a la solución que aparece en [69] es:

$$\rho = \frac{C(1-K)}{8\pi} \frac{3 + Cr^2}{(1 + Cr^2)^2}. \quad (4.53)$$

donde C y K son constantes. Para aplicar el método descrito anteriormente, es preferible redefinir la ecuación (4.53) de manera más conveniente, eso es

$$\rho = \frac{\sigma}{24\pi} \frac{3 + Cr^2}{(1 + Cr^2)^2}, \quad (4.54)$$

por lo tanto,

$$m = \frac{\sigma r^3}{6(1 + Cr^2)}, \quad (4.55)$$

donde la densidad central es obviamente $\rho_c = \frac{\sigma}{8\pi}$.

La presión radial (Figura 4.5) y tangencial resultan ser:

$$P = \frac{\sigma}{24\pi} \frac{1 - Cr^2}{(1 + Cr^2)^2} \quad \text{y} \quad P_{\perp} = \frac{\sigma}{24\pi} \frac{(3 - 6Cr^2 + r^2\sigma - 9r^4C^2 + 3Cr^4\sigma)}{(3 + 3Cr^2 - r^2\sigma)(1 + Cr^2)^3}, \quad (4.56)$$

Las condiciones de contorno en la superficie: $P(R) = 0$ y $M = m(R)$ conducen a que

$$C = \frac{1}{R^2} \quad \text{y} \quad \rho_c = \frac{3M}{2\pi R^3}. \quad (4.57)$$

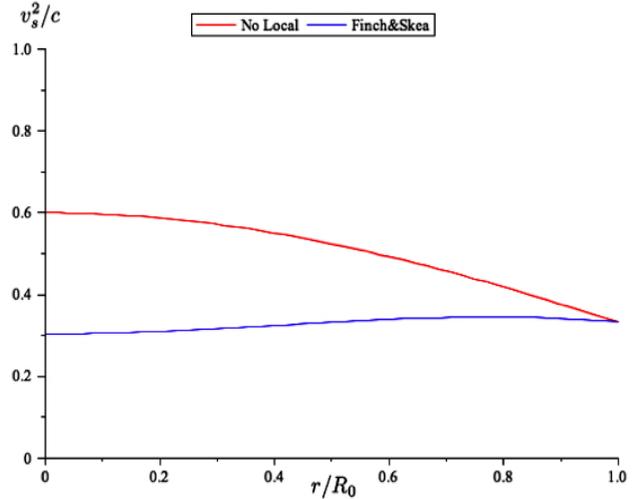


Figura 4.6: Velocidad del sonido radial al cuadrado para la solución original (Finch-Skea) y la solución no local en función de r .

Las velocidades del sonido radial (Figura 4.6) y tangencial son

$$v_s^2 = \frac{3 - Cr^2}{5 + Cr^2} \quad \text{y} \quad v_{s\perp}^2|_c = \frac{2}{5} \left[\frac{9C - \sigma}{C} \right]. \quad (4.58)$$

Y la ecuación de estado:

$$P = \frac{2\rho_c \rho \left(12\rho - \rho_c \mp \sqrt{\rho_c (24\rho + \rho_c)} \right)}{\left(\rho_c \pm \sqrt{\rho_c (24\rho + \rho_c)} \right)^2}. \quad (4.59)$$

Ejemplo 4: La solución estática isótropa de Tolman IV, la cual fue originalmente presentada por R.C. Tolman en 1939 [71], es en algunos aspectos similar a la ecuación de estado para un gas de Fermi. Este mismo perfil es también encontrado como un caso particular de una familia más general de soluciones por Korkina [72] y Durgapal [73].

En [73] se propone el siguiente *ansatz* para la función métrica $\nu(r)$,

$$e^{2\nu} = A (1 + Cr^2)^n, \quad (4.60)$$

donde n es un parámetro y A una constante de proporcionalidad. Es claro que para $n = 1$ la función métrica $\nu(r)$ coincide con el *ansatz* utilizado para obtener la solución Tolman IV. Siguiendo el esquema de Durgapal, el ejemplo mostrado aquí, corresponderá al caso $n = 1$ en [73] donde la densidad masa-energía es

$$\rho = \frac{C}{8\pi} \left[\frac{1 - 3K - 3Kx}{1 + 2x} + \frac{2(1 + Kx)}{(1 + 2x)^2} \right],$$

donde $x = Cr^2$, con C y K constantes a determinar.

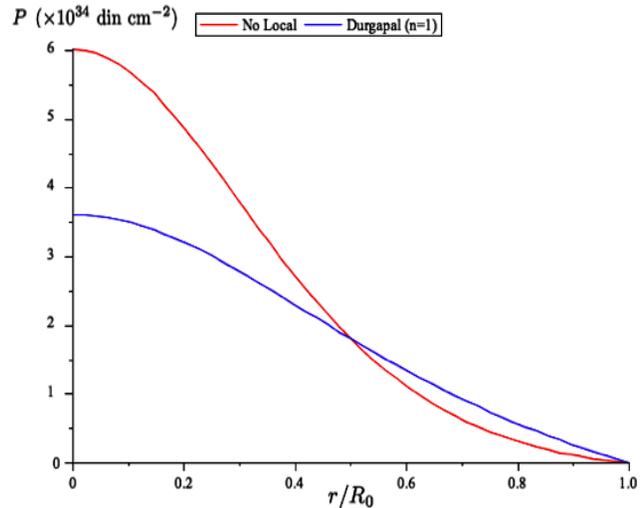


Figura 4.7: Perfiles de presión: la solución original (Durgapal), y la solución no local, para diferentes valores de r .

Las ecuaciones de Einstein suministran la presión radial (Figura 4.7) y tangencial:

$$P = \frac{C}{8\pi} \frac{1 - 2x - K(1 + x + 2x^2)}{(1 + 2x)^2} \quad \text{y} \quad (4.61)$$

$$P_{\perp} = \frac{C}{8\pi} \frac{(4x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 7x - 1)K^2x - (4x^4 + 24x^3 + 19x^2 + 4x + 1)K - 6x^2 - 3x + 1}{(1 + 2x)^3(1 + x)(1 + Kx)}.$$

La función masa

$$m = \frac{Cr^3}{2} \left[\frac{1 - K(1 + Cr^2)}{1 + 2Cr^2} \right]. \quad (4.62)$$

La densidad central viene dada por

$$\rho_c = \frac{3C}{8\pi} (1 - K). \quad (4.63)$$

La velocidades del sonido radial (Ver Figura 4.8) y la velocidad del sonido tangencial son

$$v_s^2 = \frac{3 - 2Cr^2}{5 + 2Cr^2}, \quad v_{s\perp}^2|_c = \frac{2}{5} \left[\frac{K^2 + K - 5}{K - 2} \right]. \quad (4.64)$$

Las constantes K y C son obtenidas, como en los casos anteriores, de las condiciones de contorno $M = m(R)$ y $P(R) = 0$ respectivamente, es decir,

$$K = \frac{2R - M - 3\sqrt{M(4R - 7M)}}{2R} \quad \text{y} \quad C = -\frac{2 + K - \sqrt{4 + 12K - 7K^2}}{4KR^2}. \quad (4.65)$$

Ejemplo 5: El perfil de densidad para este último ejemplo corresponde a una solución que fue originalmente propuesta por M. Wyman [74]. Nuevamente, la misma solución es encontrada en [72, 73, 75, 76] y [77]. La función densidad, tal y como aparece en [73] ($n = 2$), es la siguiente

$$\rho = -\frac{C K (3 + 5x)}{8\pi (1 + 3x)^{\frac{5}{3}}}, \quad (4.66)$$

donde $x = Cr^2$. K y C son constantes. La función masa es entonces la siguiente:

$$m = -\frac{1}{2} \frac{CKr^3}{(1 + 3Cr^2)^{2/3}}. \quad (4.67)$$

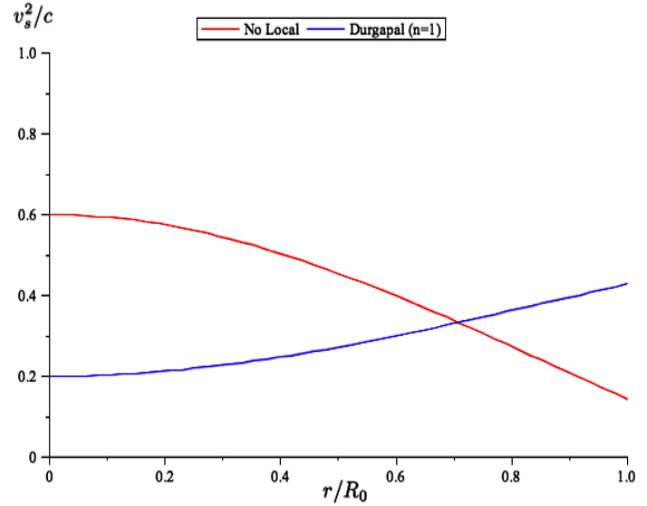


Figura 4.8: Velocidad del sonido radial al cuadrado vs r : Durgapal ($n=1$) en azul y la solución no local.

El método aplicado al perfil de densidad (4.66) lleva a que la presión radial y tangencial tengan la siguiente forma: (Ver Figura 4.9)

$$P = \frac{C K (x - 1)}{8\pi (1 + 3x)^{\frac{5}{3}}}, \quad P_{\perp} = \frac{CK (1 + 3x)^{\frac{2}{3}} (x^2 + 4x - 1) + Kx (3x^2 + 8x + 1)}{8\pi (1 + 3x)^{\frac{8}{3}} [Kx + (1 + 3x)^{\frac{2}{3}}]}. \quad (4.68)$$

Las velocidades del sonido radial (Ver Figura 4.10) y la velocidad del sonido tangencial en el centro son:

$$v_s^2 = \frac{1}{5} \frac{3 - Cr^2}{1 + Cr^2}, \quad v_{s\perp}^2|_c = \frac{1}{5} [6 + K]. \quad (4.69)$$

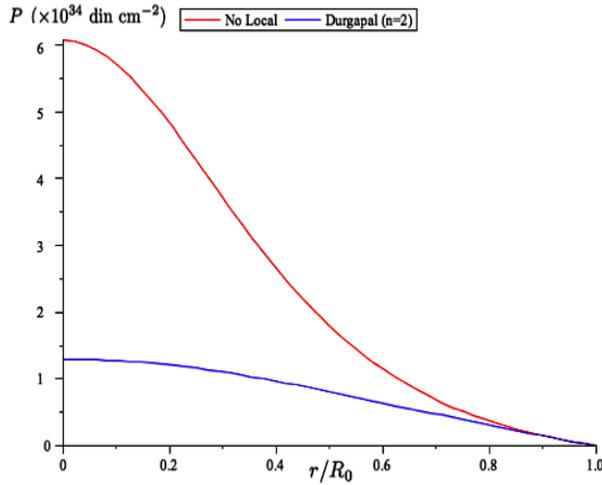


Figura 4.9: Perfiles de presión: la solución original (Durgapal, $n = 2$), y la solución no local, para diferentes valores de r .

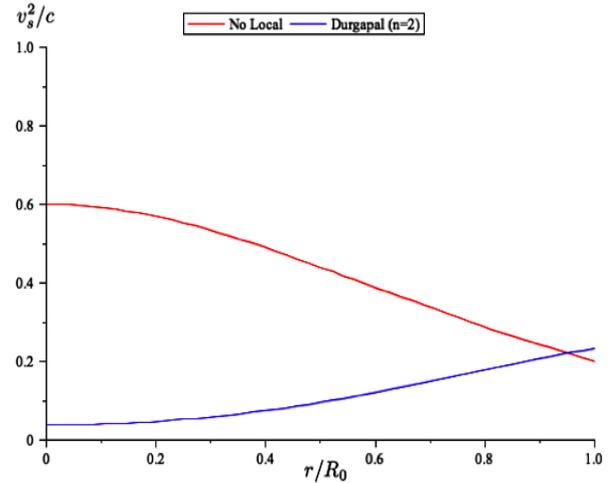


Figura 4.10: Velocidad del sonido radial al cuadrado para la solución original (Durgapal, $n = 2$) y la solución no local en función de r .

A través de las condiciones de contorno se obtiene entonces que

$$C = \frac{1}{R^2}, \quad \text{y} \quad K = -4\sqrt[3]{2}\frac{M}{R}. \quad (4.70)$$

La densidad central viene dada por

$$\rho_c = -\frac{3CK}{8\pi} = \frac{3\sqrt[3]{2} M}{2\pi R^3}. \quad (4.71)$$

4.2.2. Modelando esferas anisótropas

Los parámetros: masa, M , en términos de masas solares M_\odot , M/R : el potencial gravitacional en la superficie, el corrimiento al rojo en la superficie z , la densidad en la superficie ρ_R y la densidad central ρ_c que caracterizan las configuraciones de materia descritas en los ejemplos anteriores, se resumen en la siguiente tabla:

| Ecuación de Estado | M/R | $M (M_\odot)$ | z | $\rho_R \times 10^{14} (\text{gr.cm}^{-3})$ | $\rho_c \times 10^{15} (\text{gr.cm}^{-3})$ |
|--------------------|-------|---------------|-----|---|---|
| Ejemplo 1 | 0.32 | 2.15 | 0.6 | 6.80 | 1.91 |
| Ejemplo 2 | 0.40 | 2.71 | 1.2 | 8.57 | 1.93 |
| Ejemplo 3 | 0.25 | 1.70 | 0.4 | 5.36 | 1.61 |
| Ejemplo 4 | 0.25 | 1.70 | 0.4 | 5.36 | 2.00 |
| Ejemplo 5 | 0.25 | 1.70 | 0.4 | 5.36 | 2.03 |

Todo esos parámetros se han ajustado de manera tal que la función masa satisfaga todas las condiciones de aceptabilidad física y las condiciones de energía, para un objeto esférico compacto de radio $R = 10$ Km. En el Apéndice A se muestra el conjunto completo de figuras para los 5 ejemplos señalados aquí.

4.3. Soluciones con $P = 0$ y $P_{\perp} = 0$

En esta sección vamos a mostrar que es posible obtener soluciones físicamente aceptables para configuraciones de materia con una **EENL** para dos casos particulares extremos: la primera haciendo la presión radial igual a cero, es decir, $P_{\perp} \neq 0$ y $P = 0$ y la segunda haciendo la presión tangencial igual a cero, es decir, $P_{\perp} = 0$ and $P \neq 0$.

4.3.1. Caso 1: $P = 0$ y $P_{\perp} \neq 0$

El estudio de configuraciones de materia con presiones radiales nulas tiene tal vez sus orígenes en G. Lemaître [14], A. Einstein [78] y P.S. Florides [65] quienes estudiaron el caso para soluciones estáticas. Algunos modelos dinámicos fueron considerados también en el pasado [16], [79]-[81] y de manera más reciente en [82]-[85] donde hacen alguna relación con el hecho del surgimiento de singularidades desnudas. También se han estudiado modelos conformemente planos con presiones radiales nulas [86].

De la ecuación (4.12) es trivial darse cuenta que cuando $P = 0$ se obtiene

$$\frac{2m'}{r^2} = \frac{4m}{r^3} \quad \Rightarrow \quad m(r) = Cr^2. \quad (4.72)$$

Por lo tanto, la densidad y la presión tangencial pueden ser calculados para dar:

$$\rho = \frac{C}{2\pi r} \quad \text{y} \quad P_{\perp} = \frac{C^2}{4\pi(1 - 2Cr)}. \quad (4.73)$$

La constante C puede ser obtenida de las condiciones de contorno

$$m(R) = M \quad \Rightarrow \quad C = \frac{M}{R^2}. \quad (4.74)$$

4.3.2. Caso 2: $P_{\perp} = 0$ y $P \neq 0$

La segunda solución estática con una **EENL** que vamos a estudiar es el caso en que $P_{\perp} = 0$ y $P \neq 0$. La razón para considerar esta suposición se basa en el enorme esfuerzo que se ha hecho para estudiar los efectos de campos magnéticos intensos ($B \gtrsim 10^{15}$ G) sobre objetos astrofísicos extremadamente compactos ([17]-[20]).

Algunas observaciones parecen confirmar que las estrellas de neutrones recientemente formadas con campos magnéticos muy fuertes (magnetar o magnetoestrella), pueden representar fuentes anómalas de rayos X (X Ray pulsars) [19]. Uno de los efectos de la presencia de campos magnéticos intensos sobre la ecuación de estado para materia superdensa es el hecho de que inducen presiones anisótropas locales [18, 20, 21], y es posible obtener casos extremos donde la presión perpendicular a los campos magnéticos se hace cero. En nuestro caso supondremos que la presión tangencial es cero en todas las direcciones. En este sentido consideraremos que nuestra solución está inspirada en los modelos de magnetar.

Es claro que si $P_{\perp} = 0$ la ecuación (4.13) resulta en:

$$\frac{m''}{r} + \frac{2(m'r - m)}{r^3} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right] = 0, \quad (4.75)$$

la cual puede ser integrada para dar:

$$m = \frac{r}{2} [1 - e^{-2(C_1 r + C_2)}] . \quad (4.76)$$

La densidad y la presión radial surgen entonces de las ecuaciones (4.11) y (4.12) respectivamente

$$\rho = \frac{e^{-2(C_1 r + C_2)}}{8\pi r^2} [2rC_1 - 1 + e^{2(C_1 r + C_2)}] \quad y \quad (4.77)$$

$$P = \frac{e^{-2(C_1 r + C_2)}}{8\pi r^2} [2rC_1 + 1 - e^{2(C_1 r + C_2)}] . \quad (4.78)$$

Las constantes C_1 y C_2 se pueden obtener de las condiciones de contorno en $r = R$:

$$m(R) = M \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{M}{R(R - 2M)} \quad y \quad (4.79)$$

$$P(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{M}{R - 2M} + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2M}{R - 2M} \right) . \quad (4.80)$$

Es importante mencionar que aunque la solución (4.77) y (4.78) satisfacen las condiciones de aceptabilidad física y las condiciones de energía, la función masa (4.76) se hace negativa en el núcleo de la distribución, de la ecuación (4.76) resulta que:

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{R}{2} \left[2 + \left(\frac{R}{M} - 2 \right) \ln \left(1 - 2\frac{M}{R} \right) \right] . \end{cases} \quad (4.81)$$

Por lo tanto, configuraciones de materia con una ecuación de estado no local y con el agregado de una presión tangencial nula resulta en una función masa que es negativa en el rango siguiente:

$$0 < r < \frac{R}{2} \left[2 + \left(\frac{R}{M} - 2 \right) \ln \left(1 - 2\frac{M}{R} \right) \right] , \quad (4.82)$$

y positiva en la región:

$$\frac{R}{2} \left[2 + \left(\frac{R}{M} - 2 \right) \ln \left(1 - 2\frac{M}{R} \right) \right] < r < R. \quad (4.83)$$

Esta situación podría mostrarnos una aparente limitación en la definición de la función masa de Schwarzschild (2.14) cuando se aplica a configuraciones de materia anisótropas. Sí se utiliza una definición alternativa para la energía total dentro de una configuración de materia acotada, como la expresión de masa propuesta por Tolman-Whittaker ([87] y [88]):

$$m_{TW}(r) = 4\pi \int_0^r r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} (\rho - P - 2P_{\perp}) dr \equiv e^{(\nu+\lambda)/2} (m + 4\pi P r^3) , \quad (4.84)$$

entonces, para este modelo se tiene que

$$m_{TW}(r) = C_1 r^2 , \quad (4.85)$$

y de esta manera se excluye una aparente situación de carácter no físico.

4.4. Solución con la condición Weyl cero

La condición Weyl cero, ecuación (2.126) caso estático, junto con la condición no local, resulta en la siguiente ecuación diferencial

$$\lambda'' + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{2\lambda}}{r^2} = 0, \quad (4.86)$$

cuya solución es la siguiente

$$e^{2\lambda} = K^2 r^2 [1 + \text{ctg}^2(A + Kr)], \quad (4.87)$$

donde A y K son constantes que resultan de la integración.

Como los elementos métricos deben ser regulares en el centro, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{2\lambda} = 1 \Rightarrow A = 0. \quad (4.88)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (4.87) la función masa queda determinada

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[1 - \frac{\text{sen}^2(Kr)}{K^2 r^2} \right]. \quad (4.89)$$

Por otro lado, de la condición de contorno $M = m(R)$, se tiene que la constante K debe satisfacer la siguiente ecuación trascendental:

$$\text{sen}(KR) = KR \left[1 - \frac{2M}{R} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.90)$$

Las ecuaciones de campo resultan ser

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi r^2} \left[\frac{\text{sen}^2(Kr)}{K^2 r^2} - \frac{\text{sen}(2Kr)}{Kr} + 1 \right], \quad (4.91)$$

$$P(r) = \frac{1}{8\pi r^2} \left[\frac{3 \text{sen}^2(Kr)}{K^2 r^2} - \frac{\text{sen}(2Kr)}{Kr} - 1 \right], \quad (4.92)$$

$$P_{\perp}(r) = \frac{1}{2}(\rho - P) = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 - \frac{\text{sen}^2(Kr)}{K^2 r^2} \right]. \quad (4.93)$$

La constante K se puede determinar directamente de las condiciones de contorno:

$$K = \frac{\sqrt{\frac{M}{R} \left(4 - \frac{9M}{R} \right)}}{R - 2M}. \quad (4.94)$$

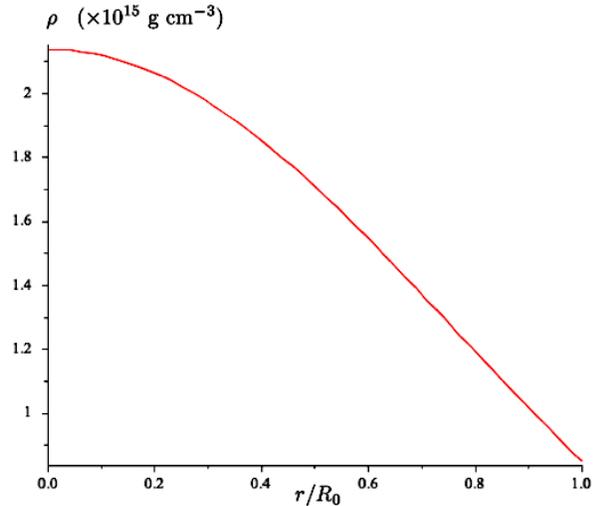


Figura 4.11: Perfil de densidad en función de r para el modelo no local con $W = 0$

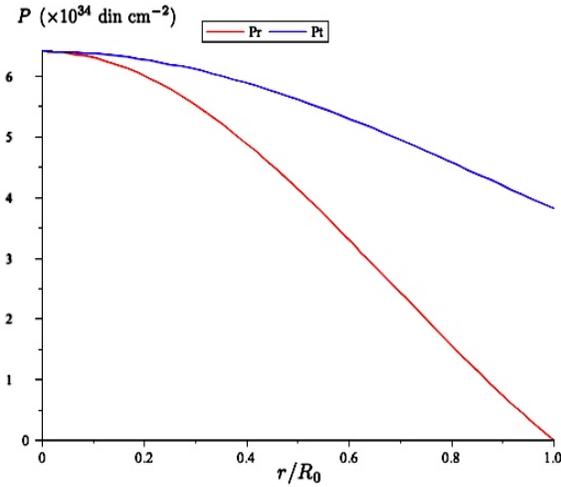


Figura 4.12: Presión radial (rojo) y tangencial (azul) para diferentes valores de r .

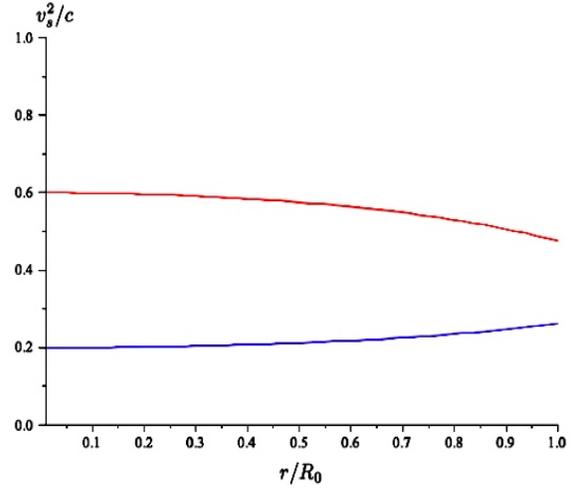


Figura 4.13: Velocidad del sonido al cuadrado vs r : radial (rojo) y tangencial (azul).

Las densidades y presiones centrales resultan ser las siguientes:

$$\rho_c = \lim_{r \rightarrow 0} \rho = \frac{K^2}{8\pi}, \quad P_c = P_{\perp c} = \lim_{r \rightarrow 0} P = \frac{K^2}{24\pi}. \quad (4.95)$$

La solución estática obtenida aquí, satisface por completo las condiciones de energía para un objeto compacto típico de radio $R = 10$ Km.

Los parámetros: potencial gravitacional en la superficie M/R , la constante K , la masa total M en términos de la masa solar M_{\odot} , el corrimiento al rojo en la superficie z , la densidad central ρ_c y la densidad en la superficie ρ_s , son dados en la siguiente tabla.

| M_{\odot} | $\mu = M/R$ | KM | $\rho_R \times 10^{14}$ (gr.cm ⁻³) | $\rho_c \times 10^{15}$ (gr.cm ⁻³) | z |
|-------------|-------------|--------|--|--|------|
| 2,68 | ≈ 0,396 | ≈ 0,79 | 8,49 | 2,14 | 1,19 |

En las figuras (4.11) y (4.12) se muestran los perfiles para la función densidad masa-energía y las presiones respectivamente correspondientes a los valores de los parámetros de la tabla anterior.

Por otro lado, la velocidad del sonido radial a través de la esfera es:

$$v_{sr}^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{(3 - K^2 r^2) \text{sen}^2(Kr) - 3Kr \text{sen}(Kr) \cos(Kr)}{(1 - K^2 r^2) \text{sen}^2(Kr) - 2Kr \text{sen}(Kr) \cos(Kr) + K^2 r^2}. \quad (4.96)$$

cuando $r \rightarrow 0$ entonces $v_{sr}^2 \rightarrow 3/5$.

La velocidad del sonido tangencial en el centro es:

$$v_{s\perp}^2|_c = \frac{\partial P_{\perp}}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{-2\text{sen}^2(Kr) + Kr \text{sen}(Kr) \cos(Kr) + K^2 r^2}{(1 - K^2 r^2) \text{sen}^2(Kr) - 2Kr \text{sen}(Kr) \cos(Kr) + K^2 r^2}. \quad (4.97)$$

Y cuando $r \rightarrow 0$ entonces $v_{s\perp}^2 \rightarrow 1/5$.

4.5. Ejemplos con ecuaciones de estado numéricas

Como se ha mencionado anteriormente, existe un esquema de trabajo para obtener ecuaciones de estado que está construido sobre la teoría lagrangiana relativista de campos. Glendenning, en [57], suministra varias ecuaciones de estado utilizando la formulación lagrangiana para la interacción de nucleones, hiperones y mesones, lo cual le permite investigar un gran número de propiedades sobre la constitución de las estrellas de neutrones. Los modelos, o casos, que aparecen en ese artículo están caracterizados por las diferentes especies de partículas que conforman el núcleo de la estrella y los diferentes valores que puedan tomar las constantes de acoplamiento.

Ahora bien, el método utilizado con anterioridad para las soluciones exactas también puede ser aplicado al caso en que los perfiles de densidades no vienen dados como expresiones analíticas, ya que los datos numéricos pueden ser ajustados utilizando alguna técnica de ajuste de curvas (*Curve-Fitting*).

Los perfiles de densidad y presión obtenidos a partir de la teoría lagrangiana, por lo general, vienen dados en función del número bariónico n en lugar del radio de la distribución, lo que significa que será necesario adaptar estas ecuaciones a las ecuaciones para la teoría no local donde las variables físicas vienen expresadas en función de la variable r .

Un método para adaptar estos modelos numéricos puede ser el siguiente:

1. Se seleccionan un conjunto de valores numéricos para la densidad $\rho(n)$ y la presión $P(n)$ de una solución estática numérica conocida.
2. A partir de algún método de interpolación numérica se obtiene una expresión analítica para la densidad y la presión radial, que denominaremos $\rho_i(n)$ y $P_i(n)$ respectivamente.
3. Se resuelve numéricamente el sistema conformado por las ecuaciones de equilibrio hidrostático, pero en función del número bariónico n :

$$\frac{d P_i(n)}{d n} \frac{d n}{d r} = - [\rho_i(n) + P_i(n)] \left[\frac{m(n) + 4\pi r^3(n) P_i(n)}{r(n) (r(n) - 2m(n))} \right], \quad (4.98)$$

$$\frac{d m(n)}{d n} \frac{d n}{d r} = 4\pi \int r^2(n) \rho_i(n) d n, \quad (4.99)$$

con condiciones iniciales $n(0) = n_c$ y $m(0) = 0$. n_c es la densidad bariónica en el centro de la distribución. Una nueva interpolación permite obtener entonces $\rho_i(r)$ y $P_i(r)$.

4. Con el perfil de densidad $\rho_i(r)$ ya determinado es posible calcular la función presión radial no local

$$P_{NL}(r) = \rho_i(r) - \frac{2}{r^3} \int r^2 \rho_i(r) d r. \quad (4.100)$$

5. La presión tangencial se puede calcular de la siguiente manera

$$P_{\perp} = \frac{(r\rho_i)'}{2} - \frac{P_{NL}}{2} + \frac{\pi r^2 (\rho_i + P_{NL})^2}{1 - 4\pi r^2 (\rho_i - P_{NL})}. \quad (4.101)$$

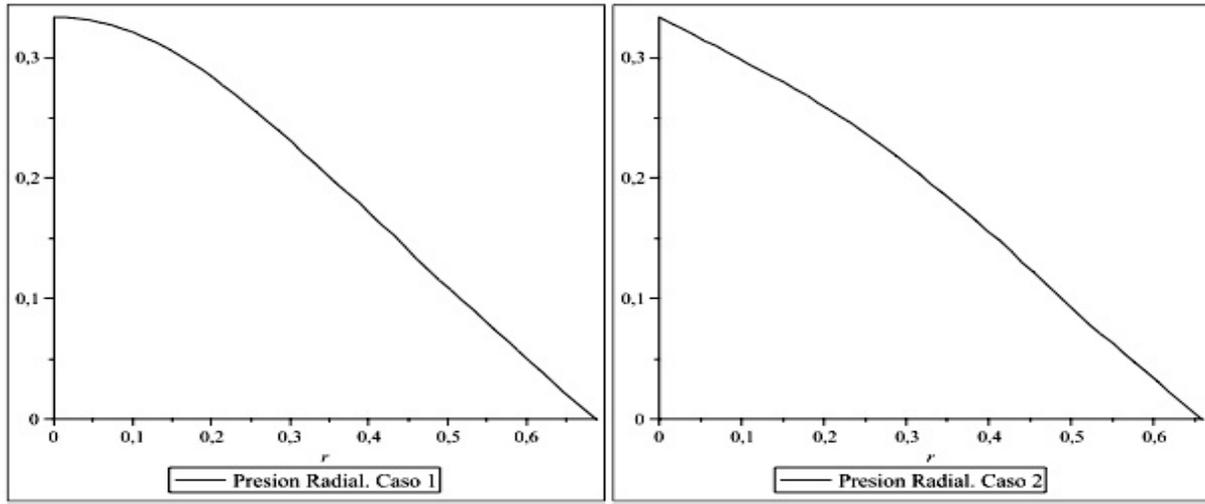


Figura 4.14: Perfiles de presión radial no local para diferentes valores del radio adimensional.

6. Se estudia la aceptabilidad física del modelo considerando las condiciones de energía.

En [57] el lagrangiano de la teoría consiste de la suma de los lagrangianos para los leptones, bariones y mesones libres, más un lagrangiano de interacción.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_B + g_{\sigma B} \sigma - g_{\omega B} \gamma_\mu \omega^\mu) \psi_B - g_{\rho\rho\mu 3} J_3^\mu \\ & + \mathcal{L}_\sigma^0 + \mathcal{L}_\omega^0 + \mathcal{L}_\rho^0 + \mathcal{L}_\pi^0 - U(\sigma) + \sum_{\lambda=e^-, \mu^-} \bar{\Psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \Psi_\lambda, \end{aligned} \quad (4.102)$$

Ver [57] para más detalles.

Una descripción completa de una estrella de neutrones, incluyendo su superficie, debe hacerse a través de una ecuación de estado que incluya un amplio rango de densidades, desde $2 \times 10^3 \text{ gr cm}^{-3}$ hasta $5 \times 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$. La ecuación de estado estudiada en los ejemplos que se señalan a continuación incluye el rango de densidades de unos $2 \times 10^{13} \text{ gr cm}^{-3}$ hasta aproximadamente $5 \times 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$. En [57] se consideran 9 casos de estudio para diferentes contenidos de partículas y diferentes valores de las constantes de acoplamiento de la teoría. Consideraremos en este trabajo dos de esos casos.

Ejemplo 1: Caso 1 de [57]. En este ejemplo se toma como punto de partida el perfil numérico de densidades que se muestra en la Tabla 1 (ver Apéndice B), que corresponde al Caso 1 de [57]. Aquí el núcleo de la estrella es una mezcla de: bariones, leptones, hiperones y mesones incluyendo una baja concentración de piones negativos π^- . En este caso se resuelve el modelo de manera completa. Los demás casos que se estudian en [57] son casos particulares del Caso 1.

Como ya se ha mencionado, para una ecuación de estado, las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff tienen una única solución que depende del valor de un sólo parámetro que caracteriza al medio material en el centro. Este parámetro puede ser la densidad bariónica

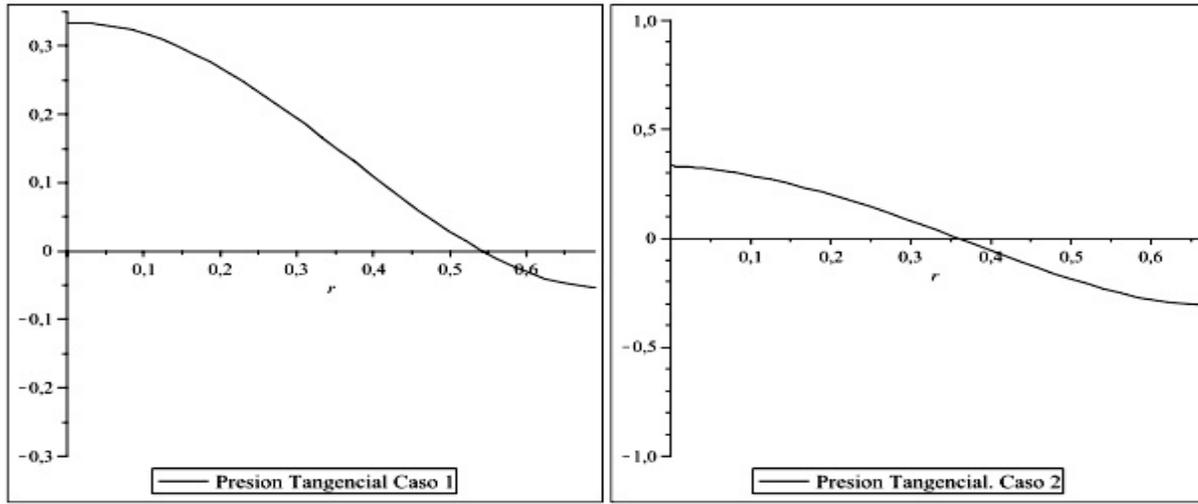


Figura 4.15: Perfiles de presión tangencial para diferentes valores del radio adimensional

o la densidad de energía. A medida que la densidad central aumenta, la masa de la estrella aumenta hasta alcanzar un valor máximo permitido, más allá de este valor la estrella se hace inestable. En este caso de estudio, la masa máxima alcanzada es $M \approx 1,81M_{\odot}$, y corresponde a un valor de la densidad central de $\rho_c \approx 2,4 \times 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$. El radio de la estrella obtenido es de $R \approx 11,3 \text{ Km}$.

Ejemplo 2: Caso 2 de [57]. En este ejemplo se toma como punto de partida el perfil numérico de densidades que se muestra en la Tabla 2 (ver Apéndice B), que corresponde al Caso 2 de [57]. En este caso el núcleo de la estrella está constituido de las mismas especies que en el ejemplo anterior pero se elimina la población de piones negativos π^- . Uno de los efectos al eliminar los piones es que la masa máxima permitida es ahora de $M \approx 2,15M_{\odot}$, lo que se corresponde a un valor de la densidad central de $\rho_c \approx 2,13 \times 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$.

Ahora bien, considerando una situación donde no existe dependencia en el tiempo de las variables físicas y también simetría esférica, las características físicas de una estrella de neutrones, tales como la masa, radio, la forma del perfil de densidad de energía y la masa crítica, pueden ser encontradas resolviendo las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Para una ecuación de estado dada, las ecuaciones TOV determinan la manera como la materia debe acomodarse a sí misma para mantener su equilibrio hidrostático. En estos objetos compactos, la mayor parte de su masa está contenida en el núcleo de la estrella y su conformación se debe a materia altamente comprimida.

El interior de la estrella existe en la forma de un gas denso de hadrones y leptones, se cree que la superficie o manto del núcleo está conformada de una red de metales pesados altamente ricos en neutrones inmersos en un gas de neutrones y electrones relativistas. La superficie de la estrella está constituida de metales menos pesados dentro de un gas de electrones. Es claro que una descripción completa de una estrella de neutrones implica acoplar ecuaciones de estado diferentes, una para cada región. En [57] se acopla la ecuación de estado del núcleo, Caso 1, con la ecuación de estado tomada del trabajo de Negele y Vautherin (1973)

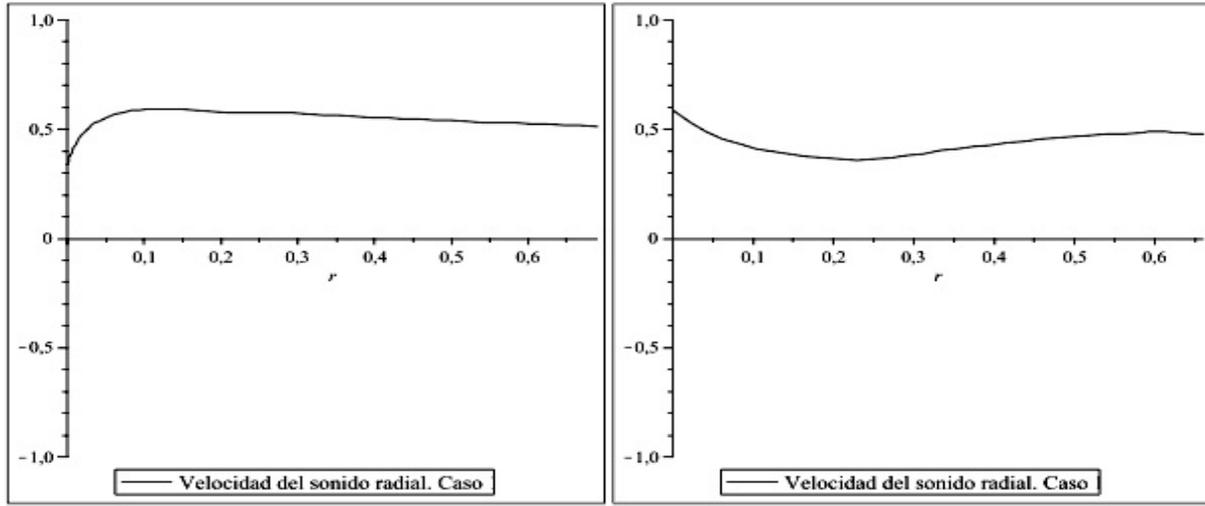


Figura 4.16: Velocidad del sonido al cuadrado, no local, para diferentes valores del radio adimensional.

que corresponde al manto que recubre al núcleo ($1 \times 10^{11} \text{ gr cm}^{-3} < \rho < 2 \times 10^{13} \text{ gr cm}^{-3}$). La superficie exterior, se describe con la ecuación de estado que fue tomada del trabajo de Harrison y Wheeler (1965) ($2 \times 10^3 \text{ gr cm}^{-3} < \rho < 1 \times 10^{11} \text{ gr cm}^{-3}$).

Por otro lado, la ecuación de estado no local es una ecuación que caracteriza la distribución de materia de manera completa, es decir, la ecuación de estado se supone válida desde $r = 0$ hasta la superficie en $r = r_s$ donde $P(r_s) = 0$.

En la Figura 4.14 se muestran los perfiles de presión radial, no local, para los dos casos considerados aquí. Los cálculos conducen a esferas más pequeñas en radio, en comparación al modelo numérico original el cual tiene un radio de unos 11,3 Km. Para el Ejemplo 1, el radio obtenido es de aproximadamente unos 6,9 Km y una masa total: $M \approx 0,94M_{\odot}$. Para el Ejemplo 2, el radio de la esfera es de unos 6,6 Km y la masa total $M \approx 0,77M_{\odot}$. La densidad central para ambos ejemplos es de aproximadamente $2,35 \times 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$. Recordemos que la única diferencia entre los ejemplos 1 y 2 es que en el ejemplo 2 se suprime la población de piones condensados π^- . Estas partículas son el resultado del decaimiento de los hiperones.

Las estrellas de neutrones no están conformadas solamente por neutrones, sino más bien por materia hadrónica, y se podría decir que el material de estos objetos compactos es una mezcla muy variada de diferentes especies bariónicas cuya composición cambia continuamente a medida que la densidad bariónica aumenta. Se estima que la población de bariones consiste de un 65% de neutrones, mientras que los protones y los hiperones existen en cantidades más o menos parecidas del orden de un 18% cada una. En el centro de la estrella la población es fundamentalmente de hiperones.

El efecto principal de tener una población grande de hiperones se refleja en la masa límite que puede tener la estrella y en lo que se denomina el ablandamiento de la ecuación de estado. El término ablandamiento tiene que ver con el grado de compresibilidad de la materia. Una ecuación de estado blanda (*soft equation of state*) tiene la característica de que describe un medio material que es más fácil de comprimir que el de una ecuación de estado

rígida (*stiff equation of state*). La relación del tipo de ecuación de estado con la masa límite se fundamenta en que una ecuación de estado rígida permite una mayor masa para sostener el colapso gravitacional.

La Figura 4.15 permite observar el efecto de no tener una producción de piones π^- en la presión tangencial y la Figura 4.16, los perfiles de la velocidad del sonido al cuadrado para ambos casos.

Estos dos ejemplos considerados aquí, abren la posibilidad de incorporar soluciones numéricas obtenidas dentro de esquemas de teorías de campo lagrangeanas para materia hadrónica en el formalismo de las ecuaciones de campo no locales. Las condiciones de energía y de aceptabilidad física fueron satisfechas convirtiendo a estos modelos, originalmente de naturaleza isótropa en la presión, en modelos anisótropos no locales físicamente aceptables.

4.6. Discusión

En este capítulo se han estudiado algunas soluciones estáticas, con simetría esférica y anisótropas de las ecuaciones de Einstein para configuraciones de materia acotadas, es decir, configuraciones de materia con una frontera perfectamente definida por un valor del radio donde la presión se hace cero. Las soluciones consideradas aquí fueron obtenidas mediante la suposición de que satisfacen una **EENL**.

Estas soluciones se obtuvieron mediante un método sencillo que consiste en tomar como punto de partida un perfil de densidad de alguna solución conocida de las ecuaciones de Einstein (solución semilla), y mediante la ecuación (4.2) obtener la función presión radial. La presión tangencial resulta simplemente de considerar la ecuación (4.5) o de una manipulación simple de las ecuaciones TOV.

Es importante señalar que la mayor parte de las soluciones exactas reportadas en la literatura carecen de significado físico, ya que no representan situaciones reales al violar ciertas condiciones mínimas de aceptabilidad como lo son la regularidad de las variables físicas en el centro de simetría o la de presentar velocidades del sonido mayores que la velocidad de la luz (ver [62] y [63]). Las soluciones presentadas aquí satisfacen plenamente las condiciones de energía, son regulares en el centro y pasan el conjunto de pruebas que tienen que ver con su relevancia física, lo que permite ajustar de manera satisfactoria el conjunto de parámetros de cada ejemplo para modelar situaciones de interés astrofísico. Los parámetros se ajustaron de manera tal que representan un objeto compacto de radio 10,0 Km y masas comprendidas entre $1,7 < M < 2,8$ masas solares.

Una propiedad adicional con respecto a la velocidad del sonido radial es que, para todos los ejemplos considerados aquí, son funciones que disminuyen monótonamente con el radio, salvo el ejemplo 2 donde la velocidad del sonido es constante dentro de toda la distribución. Por otro lado, si se interpreta el grado de rigidez de un modelo a partir de los perfiles de la velocidad del sonido, se tiene que los modelos no locales tienden a ser más rígidos, son más difíciles de comprimir que los modelos locales. Para los ejemplos 1 y 3 este fenómeno se mantiene en toda la distribución, mientras que para los ejemplos restantes la rigidez disminuye únicamente en las capas exteriores.

Otro punto que es importante mencionar es que todas las soluciones encontradas en este

capítulo corresponden a soluciones anisótropas, independientemente de si la “solución semilla” corresponde a una solución de fluido perfecto o no. Las soluciones no locales generadas en los ejemplos 3, 4 y 5 corresponden a soluciones originales isótropas.

Dos situaciones extremas también fueron consideradas: $P = 0, P_{\perp} \neq 0$ y $P \neq 0, P_{\perp} = 0$, ambos casos satisfacen completamente las condiciones de energía para fluidos descritos por una **EENL**.

Imponer una **EENL** y el requerimiento adicional de que la solución tenga que ser conformemente plana, permite cerrar el sistema de las ecuaciones de campo por lo que estas dos condiciones determinan de manera completa los coeficientes métricos. La solución obtenida aquí, ecuaciones (4.91)-(4.93), es en realidad la misma solución reportada por Stewart B.W en el ejemplo 1 de [64].

Finalmente, fue posible extender y probar el grado de factibilidad del método utilizado para generar soluciones no locales analíticas a partir de soluciones numéricas provenientes de la teoría lagrangeana de campos para nucleones, hiperones y mesones que interactúan dentro del esquema de lo que se conoce como aproximación del campo medio. Por varias razones, esta teoría resulta ser una excelente herramienta para modelar materia ultradensa: es de naturaleza relativista, es decir satisface la condición de causalidad, describe de manera satisfactoria las propiedades de volumen (*bulk properties*) de la materia nuclear, predice la aparición de las transiciones de fase debido a los cambios en la población de los constituyentes de la materia nuclear por condensación de piones o el decaimiento de determinadas partículas. Otra característica importante de la teoría es que permite un buen estimado para la masa máxima que puede llegar a tener una estrella de neutrones, estos valores de masa son importantes a la hora de identificar posibles candidatos de estrellas que puedan llegar a convertirse en agujeros negros. En [57] la masa máxima reportada para los modelos considerados allí se encuentran en el estrecho rango de $1,79 < M < 1,98$ masas solares.

En lo que concierne al método presentado en esta sección, las soluciones no locales obtenidas utilizando las ecuaciones de estado numéricas, para fluido perfecto de [57], como “soluciones semillas”, no pretende ir más allá que el de estudiar la posibilidad de heredar algunas características de los modelos de la teoría de campos, ya que los dos casos mostrados en la sección 4.5 muestran la viabilidad de incorporar modelos para estrellas de neutrones de la física de partículas y generar nuevas soluciones analíticas no locales.

Capítulo 5

Familias de soluciones exactas

Por lo general, el procedimiento más utilizado para encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein consiste en postular un tensor de materia, casi siempre en la forma de fluido perfecto, en un sistema de coordenadas apropiado, de manera que se pueda integrar el conjunto de ecuaciones de campo. Esta integración, en la mayoría de los casos, se basa en suponer alguna consideración simplificadora o *ansatz* y de utilizar alguna ecuación de estado para el medio material en estudio, $P = P(\rho)$. También es común establecer condiciones simplificadoras sobre las cantidades cinemáticas, como por ejemplo, suponer que el tensor de deformación (*shear*) sea igual a cero.

Un ejemplo que permite mostrar cómo funcionan las consideraciones simplificadoras para obtener una solución analítica, se puede ver si nos vamos al caso estático, y una situación donde el tensor energía-impulso corresponde al de un fluido perfecto. En el caso estático, las ecuaciones de campo (2.56) y (2.58) llevan a la siguiente ecuación (conocida como la Condición de Fluido Perfecto)

$$P(r) = P_{\perp}(r) \quad \Rightarrow \quad \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - \frac{\lambda' + \nu'}{r} + \frac{e^{2\lambda} - 1}{r^2} = 0. \quad (5.1)$$

Si se supone el siguiente *ansatz* para el elemento métrico $\nu(r)$:

$$e^{2\nu} = a + br^2, \quad (5.2)$$

donde a y b son constantes. La condición (5.1) se puede integrar para obtener de manera inmediata que

$$e^{2\lambda} = \frac{a + 2br^2}{(1 - 2Cr^2)(a + br^2)} \quad \Rightarrow \quad m(r) = \frac{r}{2} [1 - e^{-2\lambda}], \quad (5.3)$$

con C como una constante de integración. Una vez que las dos funciones métricas están determinadas, las variables $\rho(r)$ y $P(r)$ se obtienen vía las ecuaciones de campo, resultando en este caso en las siguientes funciones

$$\rho(r) = \frac{2r^2(1 + 6Cr^2)b^2 + (3 + 14Cr^2)ab + 6Ca^2}{8\pi(2br^2 + a)^2}, \quad (5.4)$$

$$P(r) = \frac{(1 + 6Cr^2)b + 2Ca}{8\pi(2br^2 + a)}. \quad (5.5)$$

Las constantes se pueden calcular de manera sencilla porque esta solución debe satisfacer un par de condiciones de contorno en la superficie de la esfera donde $r = R$. Estas condiciones son: $m(R) = M$ y $P(R) = 0$. Además, se tiene la siguiente información adicional para el obtener el resto de constantes:

$$\rho_c = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \frac{3(b + 2Ca)}{8\pi a}, \quad (5.6)$$

$$P_c = \lim_{r \rightarrow 0} P(r) = \frac{b - 2Ca}{8\pi a}. \quad (5.7)$$

La suposición utilizada aquí, ecuación (5.2), tiene la gran ventaja de que no es necesario integrar la ecuación de equilibrio hidrostático para buscar el valor del radio donde la presión se hace cero. Con (5.2) se obtienen directamente las variables físicas ρ y P . Esta solución no es más que la bien conocida Solución IV obtenida por R.C. Tolman [71].

5.1. El problema inverso

En vista de la dificultad de resolver las ecuaciones de Einstein resulta interesante plantearse lo que se conoce como el problema inverso:

Si es dado un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ en una variedad \mathcal{M} y una métrica \mathbf{g} , entonces, ¿qué fluido, en el caso de que exista, podría generar $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ a través de las ecuaciones de Einstein?

Este enfoque fue tratado por Ishak y Lake [89] para el caso de espacio-tiempos del tipo *warped*. Un espacio-tiempo *warped*, clase B , es aquel que se puede descomponer como el producto de dos espacios 2-dimensionales, esto es:

$$ds^2 = ds_{\Sigma_1}^2(x^1, x^2) + \mathcal{C}(x^\gamma) ds_{\Sigma_2}^2(x^3, x^4), \quad (5.8)$$

donde $\mathcal{C}(x^\gamma) = r(x^1, x^2)^2 w(x^3, x^4)^2$. Cuando $\text{Sig}(\Sigma_1) = 0$ y $\text{Sig}(\Sigma_2) = \pm 2$ al espacio tiempo se le denomina *warped* de la clase B_1 , mientras que si $\text{Sig}(\Sigma_1) = \pm 2$ y $\text{Sig}(\Sigma_2) = 0$ se le denomina *warped* de la clase B_2 [90].

Puede dar la impresión de que estos espacio-tiempos son muy particulares y restringidos, pero en realidad todos los espacio-tiempos esféricos, planos e hiperbólicos son *warped* tipo B_1 .

En [89] se muestra cómo una congruencia tipo tiempo, o flujo, para todo espacio-tiempo *warped* tipo B_1 está completamente, y algorítmicamente, determinada por la condición de flujo cero. La determinación de esta congruencia permite una interpretación fenomenológica de un fluido material, vía las ecuaciones de Einstein, directamente de la métrica y sin importar el sistema de coordenadas seleccionado.

5.1.1. Condición de flujo cero

Como ya se mencionó, un espacio-tiempo *warped* tipo B_1 es aquel que se puede escribir de la forma (5.8) [89]. Ahora bien, siempre será posible hacer que:

$$ds_{\Sigma_1}^2 = a(dx^1)^2 + 2b dx^1 dx^2 + c(dx^2)^2,$$

donde a, b y c son funciones de (x^1, x^2) .

A una congruencia de vectores tipo tiempo unitarios $u^\alpha = (u^1, u^2, 0, 0)$ se le puede asociar un campo vectorial unitario n^α normal a u^α que satisface las siguientes condiciones: $n^\alpha u_\alpha = 0$, $n^\alpha n_\alpha = 1$. Esto hace que $n_\alpha = \psi(x^1, x^2)(u^2, -u^1, 0, 0)$, donde ψ es un factor de normalización.

Por la condición de que u^α es tipo tiempo resulta

$$u^\alpha u_\alpha = -1 = a(u^1)^2 + 2bu^1u^2 + c(u^2)^2, \quad u^1 > 0. \quad (5.9)$$

La condición de flujo cero es la siguiente

$$G_\alpha^\beta u^\alpha n_\beta = 0, \quad (5.10)$$

donde G_α^β es el tensor de Einstein. Por lo tanto, esta condición implica que

$$Au^1u^2 - B(u^1)^2 + C(u^2)^2 = 0, \quad (5.11)$$

donde

$$A \equiv G_1^1 - G_2^2, \quad B \equiv G_1^2, \quad C \equiv G_2^1, \quad (5.12)$$

son funciones de (x^1, x^2, x^3, x^4) y se supondrá que no se hacen cero simultáneamente.

Se tiene entonces que la congruencia vendrá determinada por las ecuaciones (5.9) y (5.11) y no tiene por qué existir necesariamente. Es de hacer notar que el hecho de utilizar coordenadas comóviles, esto es $u^2 = 0$, implica que $B = 0$ por (5.11).

Por ejemplo, si se considera un elemento métrico diagonal, entonces $b = 0$ en (5.9), esto implica que a y c tienen que tener signos diferentes. Si $a < 0$ $c > 0$ y $Bc = Ca$, entonces:

$$(u^1)^2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{a} - \frac{A}{\sqrt{A^2a^2 + 4B^2ac}} \right], \quad (5.13)$$

$$(u^2)^2 = \frac{1}{2c} \left[-1 + \frac{Aa}{\sqrt{A^2a^2 + 4B^2ac}} \right]. \quad (5.14)$$

Al imponer coordenadas comóviles, es decir $u^2 = 0$, resulta que $B = C = 0$.

Si el espacio-tiempo se considera con la propiedad de tener simetría esférica, la variedad se puede representar por una métrica de la forma:

$$ds^2 = ds_\Sigma^2(t, r) - r^2(t, r) (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2). \quad (5.15)$$

Aquí, y en lo que sigue, no se continuará con la signatura para la métrica que se plantea en [89]. Volvemos a la signatura tomada originalmente en este trabajo donde $u^\alpha u_\alpha = 1$.

Una de las funciones fundamentales que se pueden asociar a la variedad es la masa gravitacional $m(t, r)$. Esta función, la masa de Misner, se determina a partir del tensor de Riemann, ecuación (2.16).

En un sistema comóvil y considerando simetría esférica, el tensor de materia se puede representar, como ya ha sido mencionado, por:

$$T_\beta^\alpha = \text{diag}(\rho, -P, -P_\perp, -P_\perp), \quad (5.16)$$

Ahora bien, existe la posibilidad de construir cuatro escalares independientes a partir del conjunto $\{G_\beta^\alpha, u^\alpha, n_\alpha\}$. Estos escalares son: $G_\alpha^\beta u^\alpha n_\beta$ que es la condición (5.10), $G1 \equiv G_\alpha^\beta u^\alpha u_\beta$, $G2 \equiv G_\alpha^\beta n^\alpha n_\beta$ y $G \equiv G_\alpha^\alpha$.

Con (5.16) resulta que:

$$G = 8\pi(\rho - P - 2P_\perp), \quad (5.17)$$

$$G1 = 8\pi\rho, \quad (5.18)$$

$$G2 = 8\pi P, \quad (5.19)$$

$$-G + G1 - G2 = 16\pi P_\perp. \quad (5.20)$$

Es fácil ver que la condición de fluido perfecto (ecuación (5.1)), es, en términos de los escalares mencionados aquí, equivalente a:

$$-G + G1 - 3G2 = 0, \quad (5.21)$$

y la función masa

$$m(t, r) = \frac{r^3}{12} [3(G1 - G2) - G] + \frac{r}{2} C_{\theta\phi\theta}^\phi, \quad (5.22)$$

donde $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ es el tensor de Weyl. De esta última expresión se deduce que si el espacio-tiempo tiene la propiedad de ser conformemente plano, entonces:

$$m(t, r) = \frac{r^3}{12} [3(G1 - G2) - G]. \quad (5.23)$$

5.1.2. Caso estático y con simetría esférica

Consideremos una vez más el elemento métrico en coordenadas de curvatura

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (5.24)$$

donde $\nu = \nu(r)$ y $\lambda = \lambda(r)$. Si utilizamos el hecho de que

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r},$$

de la condición (5.21) se obtendrá una expresión que contendrá a las funciones $m(r)$, $\nu(r)$ y derivadas hasta orden 2 de $\nu(r)$:

$$r^2 (r - 2m) [\nu'' - (\nu')^2] - r\nu' [r - 3m + rm'] - rm' + 3m = 0. \quad (5.25)$$

De esta ecuación diferencial se puede apreciar que, conocida $m(r)$, se obtiene una ecuación de Riccati para $\nu'(r)$, pero conociendo $\nu(r)$ lo que resulta es una ecuación lineal de primer orden para $m(r)$.

Es posible construir un procedimiento para obtener una familia de soluciones de las ecuaciones de Einstein para el caso de fluido perfecto [91]. Dada la función $\nu(r)$, entonces se puede integrar para $m(r)$:

$$m(r) = \frac{\int b(r) c(r) dr + \mathcal{C}}{c(r)}, \quad (5.26)$$

donde \mathcal{C} es una constante y:

$$a(r) \equiv \frac{2r^2 [\nu'' + (\nu')^2] - 3r\nu' - 3}{r[r\nu' + 1]}, \quad (5.27)$$

$$b(r) \equiv \frac{r[r(\nu'' + (\nu')^2)] - \nu'}{r\nu' + 1}, \quad (5.28)$$

$$c(r) \equiv e^{\int a(r) dr}. \quad (5.29)$$

Ahora bien, la función $\nu(r)$ no es del todo arbitraria ya que debe cumplir con una serie de requerimientos que eviten singularidades en los invariantes obtenidos a partir del tensor de Riemann. Para un fluido perfecto, estático y con simetría esférica, el hecho de que la densidad central ρ_c y la presión central P_c sean finitas, garantiza que todas las cantidades invariantes del tensor de Riemann sean regulares en el centro de simetría. Entonces, la función $\nu(r)$ debe ser una función monótona creciente con un mínimo regular en $r = 0$ y además $\nu(0) = 0$, $\nu'(0) = 0$, $\nu''(0) = \alpha(3P_c + \rho_c) > 0$ [91]. Por otro lado, para que el espacio-tiempo represente una superficie regular en la superficie $r = r_s$ al acoplarse con el espacio-tiempo de Schwarzschild, donde $m(r_s) = M$, se debe cumplir: $\nu'(r_s) = M/(r_s(r_s - 2M))$.

En resumen, se tiene que la función $\nu(r)$ permite obtener, vía la ecuación (5.26), una solución exacta de las ecuaciones de Einstein regular en el centro para el caso de fluido perfecto y con simetría esférica. En [91] se propone un ejemplo para $\nu(r)$, claramente inspirado en (5.2):

$$\nu = \frac{1}{2}N \ln \left(1 + \frac{r^2}{\alpha} \right), \quad N \geq 1, \quad (5.30)$$

donde N es un entero y α una constante positiva.

Esta familia infinita de funciones cumple con los requisitos expuestos anteriormente para diferentes valores de N , pero es particularmente interesante ver que la familia de funciones (5.30) representan soluciones completamente distintas para los diferentes valores de N . De hecho, para los primeros cinco valores de N se tienen las siguientes soluciones ya conocidas:

$N = 1$: Del tipo Tolman IV (Ecuación (5.2) con $a = 1$ y $b = 1/\alpha$)

$N = 2$: Solución donde $m = \mathcal{C}r^3/(3r^2 + \alpha)^{2/3}$

$N = 3$: Heint IIa [92]

$N = 4$: Durg IV [73]

$N = 5$: Durg V [73]

Una generalización de este método para soluciones diferentes a la de un fluido perfecto, soluciones anisótropas, fue propuesto por Herrera, Ospino y Di Prisco en [93].

5.2. Familias de soluciones exactas con una EENL

Se quiere explorar la factibilidad de la utilizar una ecuación de estado no local para obtener familias de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, considerando una distribución acotada de materia, anisótropa, estática y con simetría esférica descrita por $\mathbf{T}_b^a = \text{diag}(\rho, -P, -P_\perp, -P_\perp)$, donde, $\rho(r)$ es la densidad de energía, $P(r)$ la presión radial y $P_\perp(r)$ la presión tangencial.

Como ya fue mencionado, en el caso estático, el elemento métrico (3.37) resulta ser

$$ds^2 = e^{2\lambda} e^{2\kappa} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.31)$$

donde $\lambda = \lambda(r)$ y κ es una constante.

Las ecuaciones de Einstein que se deducen a partir de (5.31) son

$$\rho = \frac{1 - e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda')}{8\pi r^2}, \quad (5.32)$$

$$P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad (5.33)$$

$$P_\perp = \frac{\lambda'' e^{-2\lambda}}{8\pi}. \quad (5.34)$$

Nuevamente, con (5.32) y (5.33) resulta:

$$m(r) = 2\pi r^3 (\rho - P). \quad (5.35)$$

De las condiciones de acoplamiento se obtiene que la constante κ es:

$$\kappa = -2\lambda_s. \quad (5.36)$$

5.3. Algoritmo para obtener familias de soluciones no locales

A partir del método propuesto por Lake [91] para generar familias de soluciones exactas, estáticas e isotropas de las ecuaciones de Einstein, al suministrar una de las funciones métricas, se puede desarrollar un procedimiento similar para el caso de ecuaciones de estado no locales. El método que se propone aquí consiste en los siguientes pasos:

- Suministrar una función métrica $\nu(r)$ de la forma

$$\nu(r) = N\Phi(r), \quad N \geq 1, \quad (5.37)$$

donde N es un entero, $\Phi(r)$ una función que debe ser monótona creciente con un mínimo regular en $r = 0$ y cumplir con un conjunto de condiciones de acoplamiento [91].

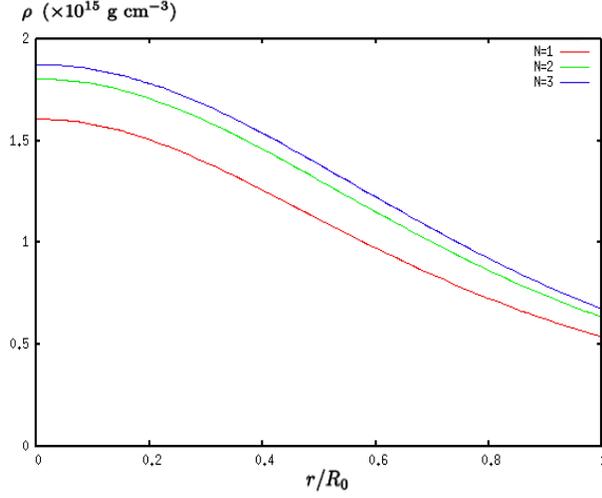


Figura 5.1: Densidad de energía para diferentes valores de N , familia tipo Tolman IV.

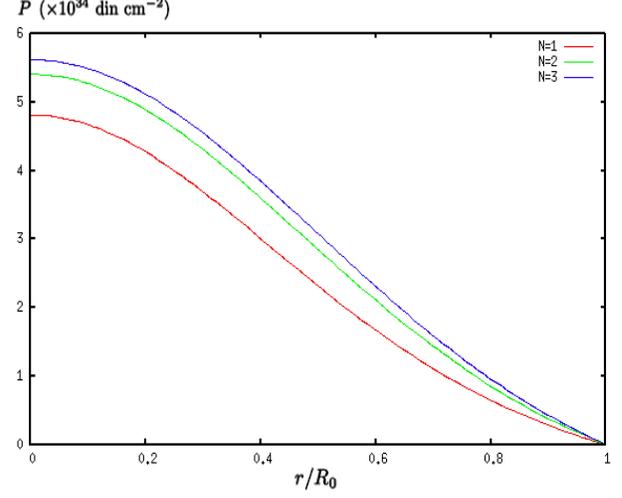


Figura 5.2: Presión radial para diferentes valores de N , familia tipo Tolman IV.

- La otra función métrica queda completamente determinada, ya que para satisfacer la condición de no localidad (3.36) se tiene que

$$\lambda(r) = \nu(r) - \kappa. \quad (5.38)$$

- Y de las ecuaciones de Einstein (5.32) - (5.34) se obtienen

$$\rho = \frac{1 - e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda')}{8\pi r^2}, \quad P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad P_{\perp} = \frac{\lambda'' e^{-2\lambda}}{8\pi}. \quad (5.39)$$

Para que $P(R) = 0$ se debe satisfacer la siguiente ecuación para $\lambda_R = \lambda(R)$

$$2R\lambda'_R + 1 = e^{2\lambda_R}. \quad (5.40)$$

La viabilidad del algoritmo anteriormente expuesto puede ser estudiado con los ejemplos que se muestran a continuación.

5.4. Familias de soluciones del tipo Tolman IV

Consideremos un caso más general que el propuesto en [91], esto es:

$$\nu(r) = \frac{1}{2}N \ln \left(a + \frac{r^2}{b} \right), \quad N \geq 1, \quad (5.41)$$

donde a y b son constantes.

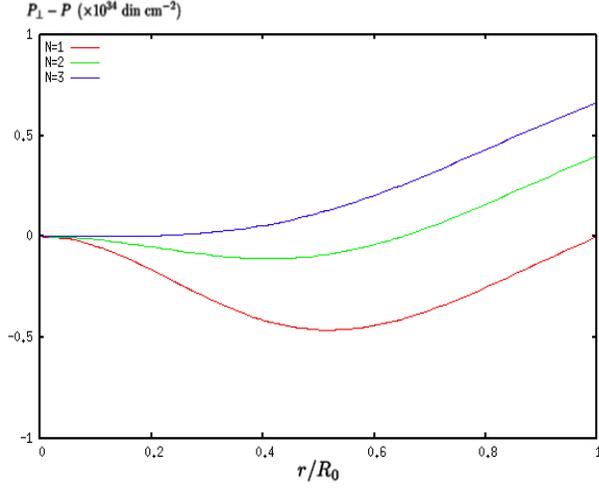


Figura 5.3: Perfil de anisotropía para diferentes valores de N , familia tipo Tolman IV.

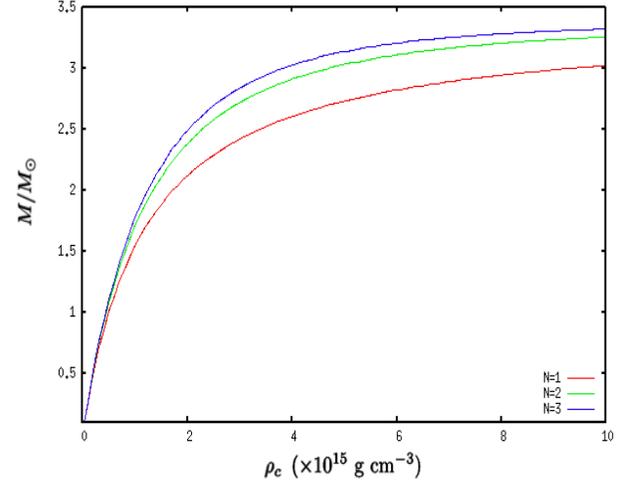


Figura 5.4: Masa vs densidad central para diferentes valores de N , familia tipo Tolman IV.

Las ecuaciones (5.32) - (5.34) resultan en

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi r^2} \left[\frac{(ab + r^2)^{(N+1)} - ab^{(N+1)}e^{2\kappa} + b^N e^{2\kappa} (2N - 1)r^2}{(ab + r^2)^{(N+1)}} \right], \quad (5.42)$$

$$P(r) = -\frac{1}{8\pi r^2} \left[\frac{(ab + r^2)^{(N+1)} - ab^{(N+1)}e^{2\kappa} - b^N e^{2\kappa} (2N + 1)r^2}{(ab + r^2)^{(N+1)}} \right], \quad (5.43)$$

$$P_{\perp}(r) = \frac{Nb^N (ab - r^2) e^{2\kappa}}{8\pi (ab + r^2)^{(N+2)}}. \quad (5.44)$$

La función masa

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[1 - \frac{b^N e^{2\kappa}}{(ab + r^2)^N} \right], \quad (5.45)$$

Para que la funciones ρ y P no sean singulares en $r = 0$, se tiene que cumplir que

$$a = [e^{2\kappa}]^{\frac{1}{N}}. \quad (5.46)$$

La condición $P(R) = 0$ implica la siguiente ecuación para b

$$b^N e^{2\kappa} [ab + R^2(2N + 1)] = (ab + R^2)^{(N+1)}. \quad (5.47)$$

Otra manera de ver la regularidad en el centro de estos modelos consiste en calcular la densidad central, en este caso la densidad central es de la forma

$$\rho_c = \frac{3Ne^{2\kappa}}{8\pi b e^{\frac{2(N+1)}{N}\kappa}}. \quad (5.48)$$

Al sustituir los valores de las constantes a y b en la expresión para $m(R) = M$, ecuación (5.45), se obtiene que

$$M = \frac{R}{2} \left[1 - \left(\frac{3N}{3N + 8\pi R^2 \rho_c} \right)^N \right].$$

A continuación se presentan varios casos para diferentes valores de N utilizando las ecuaciones (5.46) y (5.47) para calcular las constantes a y b .

Caso 1:

$$N = 1 \quad \Rightarrow \quad a = e^{2\kappa}, \quad b = \frac{R^2}{e^{2\kappa}}. \quad (5.49)$$

Caso 2:

$$N = 2 \quad \Rightarrow \quad a = e^\kappa, \quad b = \frac{(3 + \sqrt{17}) R^2}{4e^\kappa}. \quad (5.50)$$

Caso 3:

$$N = 3 \quad \Rightarrow \quad a = e^{2\kappa/3},$$

$$b = \frac{R^2 \left([2(49 + \sqrt{353})]^{2/3} + [64(49 + \sqrt{353})]^{1/3} + \sqrt[3]{8192} \right)}{6e^{2\kappa/3} (49 + \sqrt{353})^{1/3}}. \quad (5.51)$$

Para $N > 3$ los cálculos van a depender de la capacidad que se tenga para resolver analíticamente la ecuación (5.47). En todo caso, siempre es posible buscar una solución numérica para (5.47).

Es importante señalar nuevamente que, a pesar de que $N = 1$ corresponde a una solución tipo Tolman IV, en este caso lo que se obtiene es una solución anisótropa y no local, y las ecuaciones de estado que resultan para valores de $N > 1$ son ecuaciones de estado con propiedades completamente diferentes.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores numéricos correspondientes a un objeto compacto de radio $R = 10$ Km. La relación Masa-Radius se denota por μ .

| Modelo | μ | $M(M_\odot)$ | a | b/M | $\rho_R \times 10^{14}$ (gr.cm ⁻³) | $\rho_c \times 10^{15}$ (gr.cm ⁻³) | $v_{s\perp}^2 _c$ |
|---------|-------|--------------|------|-------|--|--|-------------------|
| $N = 1$ | 0,25 | 1,69 | 0,25 | 256 | 5,36 | 1,61 | 4/5 |
| $N = 2$ | 0,29 | 2,00 | 0,41 | 122 | 6,32 | 1,81 | 2/3 |
| $N = 3$ | 0,31 | 2,12 | 0,52 | 97 | 6,72 | 1,87 | 3/5 |

donde $v_s^2|_c$ y $v_{s\perp}^2|_c$ son las velocidades del sonido al cuadrado en el centro:

$$v_s^2|_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad v_{s\perp}^2|_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial P_\perp}{\partial \rho}. \quad (5.52)$$

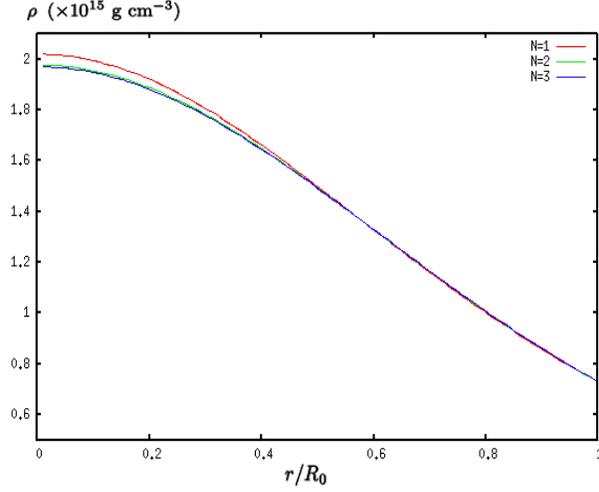


Figura 5.5: Densidad de energía para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 1.

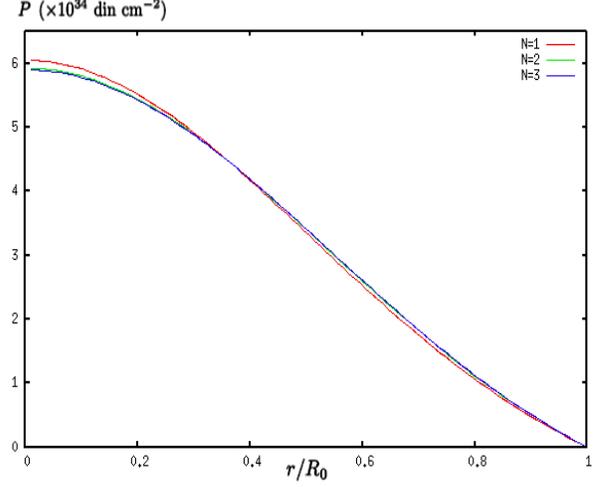


Figura 5.6: Presión radial para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 1.

5.5. Familias de soluciones conformemente planas

Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, anisótropas y con la condición del tensor de Weyl igual a cero, fueron presentadas por Stewart B.W. en [64].

En el caso estático y con simetría esférica esta condición es la siguiente (ecuación (2.126))

$$W = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\nu' \lambda' - \nu'' - \nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (5.53)$$

En [64] se define

$$\Phi'(r) \equiv r^{-1} - (r^2 - 2mr)^{-1/2}, \quad (5.54)$$

como una condición para que la función métrica

$$e^{2\nu(r)} = e^{2\Phi} (a + br^2 e^{-2\Phi})^2, \quad (5.55)$$

sea una solución de (5.53). Las cantidades a y b son constantes a determinar por las condiciones de contorno.

Resulta interesante notar que (5.54) se puede escribir de manera más sencilla si se utiliza la relación que define la función masa: $2m = r(1 - e^{-2\lambda})$, esto es

$$\Phi'(r) = \frac{1}{r} (1 - e^\lambda), \quad (5.56)$$

El método utilizado en [64] consiste en tomar algunas soluciones estáticas conocidas y mediante la integración de (5.54) obtener la otra función de la métrica. Es decir, conocida $m(r)$ se integra (5.54) para luego obtener la otra función métrica $\nu(r)$. En ese trabajo se estudian cuatro ejemplos de soluciones estáticas pero, lamentablemente, el autor no cita las respectivas fuentes.

La parte crítica de ese método consiste en poder integrar (5.54). De los cuatro ejemplos mostrados en [64] dos de ellos tienen que ver con soluciones por series para $\Phi(r)$.

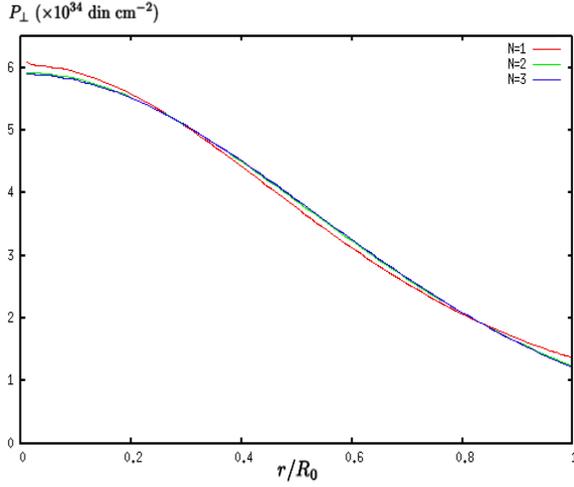


Figura 5.7: Presión tangencial para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 1.

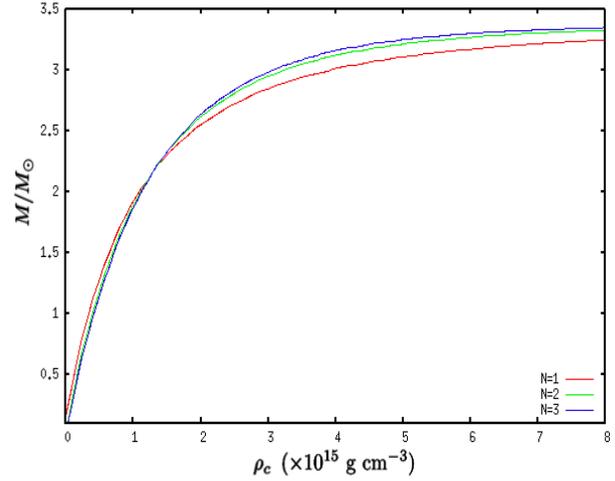


Figura 5.8: Masa vs densidad central para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 1.

5.5.1. Caso 1

Consideremos el ejemplo 1 de [64] y tomemos la función masa mostrada allí

$$m(r) = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{\text{sen}^2(Kr)}{K^2 r^2} \right) \Rightarrow \lambda = \ln \left(\frac{Kr}{\text{sen}(Kr)} \right), \quad (5.57)$$

donde K es una constante. Por lo tanto, de (5.56) se obtiene

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} Kr \cot \left(\frac{Kr}{2} \right) + C, \quad (5.58)$$

y para que $e^{2\Phi(0)} = 1$ entonces $C = 0$.

Por simplicidad, aquí haremos los siguientes cambios de variables

$$f(r) \equiv \cot \left(\frac{Kr}{2} \right), \quad f' = -\frac{K}{2} (1 + f^2), \quad f'' = \frac{K^2}{2} f (1 + f^2), \quad (5.59)$$

de manera que (5.58) queda de la siguiente forma

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} Kr f. \quad (5.60)$$

Por lo tanto, la función métrica $\nu(r)$ resulta ser

$$\nu(r) = \ln \left[\frac{Kr f}{2} \left(a + \frac{4b}{K^2 f^2} \right) \right]. \quad (5.61)$$

Para que $e^{2\nu(0)} = e^{2\kappa}$, se debe cumplir que $a = e^\kappa$.

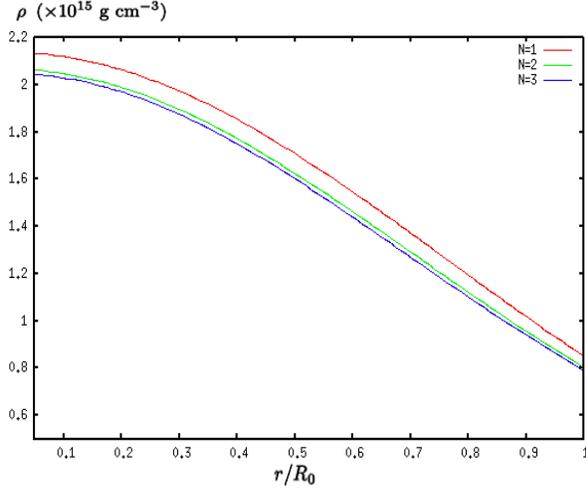


Figura 5.9: Densidad de energía para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 2.

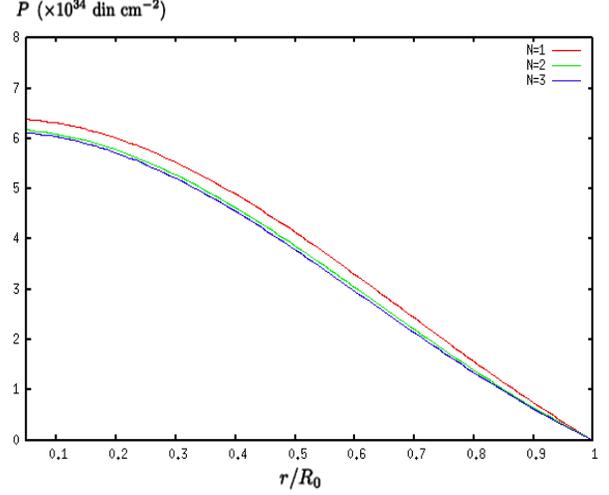


Figura 5.10: Presión radial para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 2.

Se quiere entonces estudiar la factibilidad de tomar la siguiente familia de métricas

$$\nu(r) = N \ln \left[\frac{Krf}{2} \left(a + \frac{4b}{K^2 f^2} \right) \right], \quad \text{con } a = e^{\kappa/N}. \quad (5.62)$$

Las ecuaciones de campo que resultan de la condición no local:

$$\lambda(r) = \ln \left[\frac{Krf}{2} \left(a + \frac{4b}{K^2 f^2} \right) \right]^N - \kappa, \quad (5.63)$$

son las siguientes

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 - e^{-2\lambda} \left\{ 1 - \frac{N [Kf^2 \Pi (2f - Kr(1 + f^2)) + 8rb(1 + f^2)]}{Kf^3 \Pi} \right\} \right],$$

$$P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad P_{\perp} = \frac{\lambda'' e^{-2\lambda}}{8\pi}. \quad \text{Donde } \Pi \equiv a + \frac{4b}{K^2 f^2}.$$

Para la función masa resulta:

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[1 - 4^N e^{2\kappa} \left[\frac{1}{Krf\Pi} \right]^{2N} \right]. \quad (5.64)$$

De la condición $P(R) = 0$ es posible obtener la constante b :

$$b = \frac{K^2 F^2 e^{\kappa/N}}{4} \left[\frac{NKR(1 + F^2) - (2N + 1 - e^{-\kappa})F}{NKR(1 + F^2) + (2N + 1 - e^{-\kappa})F} \right], \quad (5.65)$$

donde $F \equiv \cot \left(\frac{KR}{2} \right)$. De $m(R) = M$ se obtiene

$$4Rb = KF \left[2 - KRF e^{\kappa/2N} \right] e^{\kappa/2N}. \quad (5.66)$$

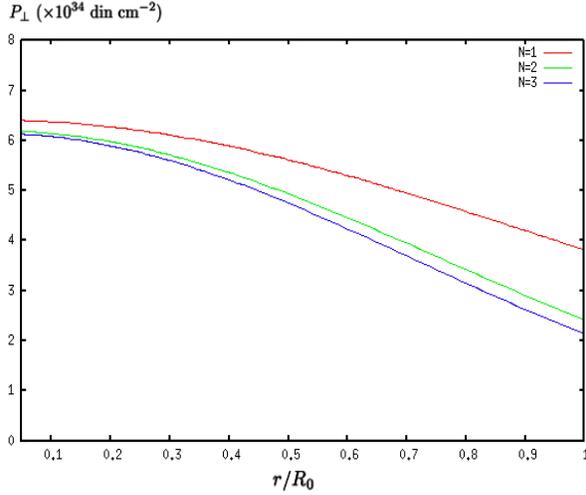


Figura 5.11: Presión tangencial para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 2.

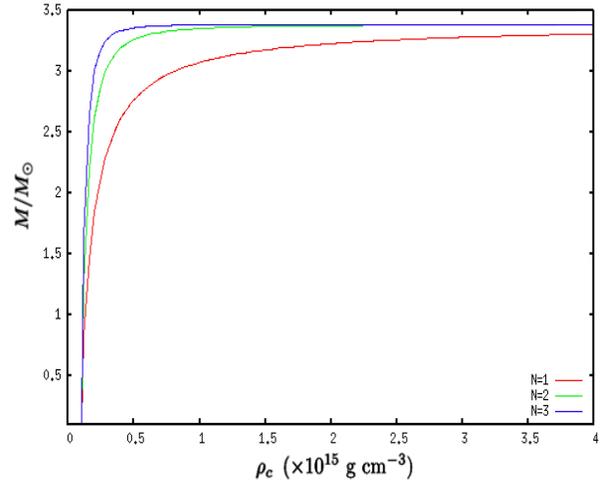


Figura 5.12: Masa vs densidad central para diferentes valores de N con $W = 0$, Caso 2.

La combinación de (5.65) y (5.66) resulta en la siguiente ecuación trascendental para el factor KR

$$N [1 + F^2] [2KRFe^{\frac{\kappa}{2N}} - 1] = \pm \sqrt{N [1 + F^2] [F^2 \{4e^{\frac{\kappa}{2N}} [2N + 1 - e^{-\kappa}] + N\} + N]}, \quad (5.67)$$

y una solución numérica de esta última ecuación permite obtener la constante K para diferentes valores de N y del potencial gravitacional en la superficie $e^{\kappa} = 1 - 2\mu$. Con el factor KR determinado se obtiene b a partir de (5.65) o de (5.66).

La densidad central puede ser calculada para todo N .

$$\rho_c = N \frac{12be^{-\kappa/N} - K^2}{16\pi}. \quad (5.68)$$

Al combinar esta última ecuación con (5.64) evaluada en la superficie resulta:

$$M = \frac{R}{2} \left[1 - 36^N \left(\frac{NK^2 F}{R [NK^2 (3F^2 + 1) + 16\pi\rho_c]} \right)^{2N} \right]. \quad (5.69)$$

En la siguiente tabla se muestran algunos valores numéricos para un objeto compacto de radio $R = 10$ Km y una relación masa radio: $\mu = 17/50$, es decir, una masa total $M = 2,30 M_{\odot}$ y un corrimiento al rojo en la superficie $z_R = 0,77$.

| Modelo | a | bM^2 | KM | $\rho_R \times 10^{14}$ (gr.cm ⁻³) | $\rho_c \times 10^{15}$ (gr.cm ⁻³) | $v_{s\perp}^2 _c$ |
|---------|-----------------|-----------------|----------------|--|--|-------------------|
| $N = 1$ | $8/25$ | $\approx 0,029$ | $\approx 0,46$ | 7,29 | 2,02 | $\approx 0,54$ |
| $N = 2$ | $2\sqrt{2}/5$ | $\approx 0,024$ | $\approx 0,28$ | 7,29 | 1,98 | $\approx 0,50$ |
| $N = 3$ | $2/5 \ 5^{1/3}$ | $\approx 0,018$ | $\approx 0,17$ | 7,29 | 1,97 | $\approx 0,49$ |

5.5.2. Caso 2

Un tratamiento completamente diferente a todo lo anterior consiste en imponer la condición de no localidad directamente en la ecuación para $W = 0$, (5.53), esto es:

$$\nu = \lambda + \kappa \quad + \quad W = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda'' + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{2\lambda}}{r^2} = 0. \quad (5.70)$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$e^{2\lambda} = K^2 r^2 [1 + \cot^2(Kr + A)] = \left[\frac{Kr}{\text{sen}(Kr + A)} \right]^2, \quad (5.71)$$

donde K y A son constantes que resultan de la integración.

Es necesario que los elementos métricos sean funciones regulares en el origen, por lo tanto, la constante A tiene que ser necesariamente igual a cero:

$$A = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} e^{2\lambda} = 1. \quad (5.72)$$

Es claro que imponer otra condición sobre los elementos métricos implica determinar por completo el sistema de ecuaciones, y que la solución obtenida en (5.71) es exactamente la misma función métrica del ejemplo 1 en [64], ecuación (5.57).

En resumen, el par de funciones métricas

$$e^{\lambda(r)} = \frac{Kr}{\text{sen}(Kr)} \quad \text{y} \quad e^{\nu(r)} = \frac{Kre^\kappa}{\text{sen}(Kr)}, \quad (5.73)$$

representan soluciones estáticas (para fluidos no perfectos) no locales y conformemente planas de las ecuaciones de Einstein.

Ahora bien, aplicar nuevamente el algoritmo significa hacer

$$\nu(r) = N \ln \left[\frac{Kre^\kappa}{\text{sen}(Kr)} \right]. \quad (5.74)$$

Para que $e^{2\lambda(0)} = 1$, se debe escribir

$$\lambda(r) = N \ln \left[\frac{Kre^\kappa}{\text{sen}(Kr)} \right] - N\kappa.$$

Las ecuaciones de campo resultantes son las siguientes

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi r^2} \left[\left(2N - 1 - \frac{NKr \text{sen}(2Kr)}{\text{sen}^2(Kr)} \right) \left(\frac{\text{sen}(Kr)}{Kre^\kappa} \right)^{2N} e^{2N\kappa} + 1 \right], \quad (5.75)$$

$$P(r) = \frac{1}{8\pi r^2} \left[\left(2N + 1 - \frac{NKr \text{sen}(2Kr)}{\text{sen}^2(Kr)} \right) \left(\frac{\text{sen}(Kr)}{Kre^\kappa} \right)^{2N} e^{2N\kappa} - 1 \right], \quad (5.76)$$

$$P_\perp(r) = \frac{N}{8\pi r^2} \left[\frac{K^2 r^2}{\text{sen}^2(Kr)} - 1 \right] \left[\frac{\text{sen}(Kr)}{Kre^\kappa} \right]^{2N} e^{2N\kappa}. \quad (5.77)$$

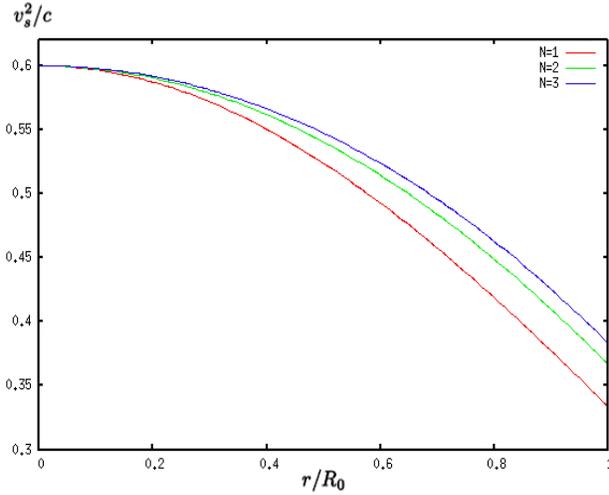


Figura 5.13: Velocidad del sonido contra r para diferentes valores de N , familia tipo Tolman IV.

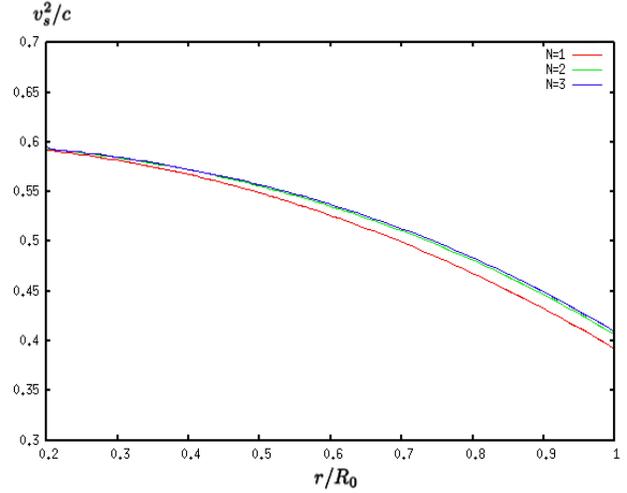


Figura 5.14: Velocidad del sonido contra r para diferentes valores de N , con $W = 0$, Caso 1.

La función masa

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[1 - \left(\frac{\text{sen}(Kr)}{Kre^\kappa} \right)^{2N} e^{2N\kappa} \right], \quad (5.78)$$

por lo tanto, en la superficie donde $m(r) = M$, se debe cumplir la siguiente identidad

$$\left(\frac{\text{sen}(KR)}{KRe^\kappa} \right)^{2N} e^{2N\kappa} = e^\kappa \Rightarrow \text{sen}(KR) = KRe^{\left(\frac{\kappa}{2N}\right)}. \quad (5.79)$$

Para la otra condición en la superficie, que es $P(R) = 0$, resulta

$$\left[2N + 1 - \frac{NKR \text{sen}(2KR)}{\text{sen}^2(KR)} \right] \left[\frac{\text{sen}(KR)}{KRe^\kappa} \right]^{2N} e^{2N\kappa} - 1 = 0, \quad (5.80)$$

pero por (5.79) se obtiene

$$2N + 1 - \frac{NKR \text{sen}(2KR)}{\text{sen}^2(KR)} = e^{-\kappa}. \quad (5.81)$$

Un cálculo sencillo muestra que la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$\cos(KR) = \frac{(2N + 1 - e^{-\kappa})}{2N} e^{\left(\frac{\kappa}{2N}\right)}. \quad (5.82)$$

Por la siguiente identidad se puede determinar K :

$$\text{sen}^2(KR) + \cos^2(KR) = 1 \Rightarrow K^2 R^2 = e^{\left(-\frac{\kappa}{N}\right)} - \frac{(2N + 1 - e^{-\kappa})^2}{4N^2}. \quad (5.83)$$

Esta expresión de K se debe introducir en la ecuación trascendental (5.79) para así obtener numéricamente un valor de la relación masa radio μ , para los diferentes valores de N .

Se tiene entonces, que la densidad central resulta ser

$$\rho_c = \frac{NK^2}{8\pi}. \quad (5.84)$$

La combinación de esta última ecuación con (5.78), evaluada en la superficie, resulta en

$$M = \frac{R}{2} \left[1 - \left(\frac{N}{2\pi R^2 \rho_c} \right)^N \left(\sin \left[\sqrt{\frac{2\pi \rho_c}{N}} R \right] \cos \left[\sqrt{\frac{2\pi \rho_c}{N}} R \right] \right)^{2N} \right]. \quad (5.85)$$

En la siguiente tabla se muestran algunos valores numéricos para un objeto compacto de radio $R = 10$ Km.

| Modelo | M_\odot | $\mu = M/R$ | KM | $\rho_R \times 10^{14}$ (gr.cm ⁻³) | $\rho_c \times 10^{15}$ (gr.cm ⁻³) | $v_{s\perp}^2 _c$ |
|---------|-----------|-----------------|----------------|--|--|-------------------|
| $N = 1$ | 2,68 | $\approx 0,396$ | $\approx 0,79$ | 8,49 | 2,14 | 1/5 |
| $N = 2$ | 2,54 | $\approx 0,374$ | $\approx 0,52$ | 8,05 | 2,07 | 14/45 |
| $N = 3$ | 2,49 | $\approx 0,368$ | $\approx 0,42$ | 7,90 | 2,05 | 12/35 |

Es claro que para valores de N diferentes a $N = 1$ no se satisface la ecuación (5.70) y para $N > 1$ lo que se tendrían entonces son familias de soluciones no locales pero con $W \neq 0$.

La solución para $N = 1$ se estudió en detalle en el capítulo 4.

5.6. Discusión

En este capítulo se consideró el algoritmo propuesto por Lake [91], para generar un conjunto de soluciones regulares, estáticas, con simetría esférica y de fluido perfecto de las ecuaciones de Einstein. Basado en la posibilidad de escoger una de las funciones métricas resultó posible generar soluciones no locales anisótropas. En [91] cada función fuente debe ser una función monótona creciente con un mínimo regular en $r = 0$, esta función al satisfacer un conjunto de condiciones de frontera generará, vía la ecuación (5.26), un conjunto de soluciones regulares en $r = 0$. El número de funciones fuente puede ser infinito, con lo cual el número de soluciones generadas podría ser infinito, pero esto no garantiza que la condición de borde $P_s = 0$ lleve a una ecuación que pueda resolverse de manera exacta. Sin embargo, es bueno acotar que el conjunto de soluciones obtenidas bajo este criterio resultan ser físicamente interesantes.

El método de [91] fue adaptado aquí de manera satisfactoria para generar conjuntos de soluciones no locales. El primer ejemplo que se consideró fue la muy bien conocida solución de Tolman IV y tres casos fueron mostrados para diferentes valores de N . La solución para $N = 1$ corresponde a la solución original del tipo Tolman IV, no local, pero para valores de $N > 1$ las soluciones se corresponden a soluciones con características completamente diferentes, es decir, para cada valor de N se tiene una ecuación de estado no local diferente.

Los perfiles de densidad y presión radial, para diferentes valores de N pueden verse en las figuras 5.1 y 5.2. En la Figura 5.3 se puede apreciar un cambio de signo de la cantidad $P_{\perp} - P$ a medida que N se hace más grande. Por otra parte, es muy frecuente el uso de los diagramas que representan la relación entre la masa total y la densidad central, Figura 5.4, para mostrar una serie de modelos de estrellas de neutrones. La masa es una función que aumenta a medida que se incrementa la densidad central hasta un valor máximo crítico, es de esperar que más allá de ese valor la estrella pase a ser inestable y pueda colapsar [57]. Para las tres ecuaciones de estado mostradas en la Figura 5.4 se tienen masas límites menores a 3, 4 masas solares.

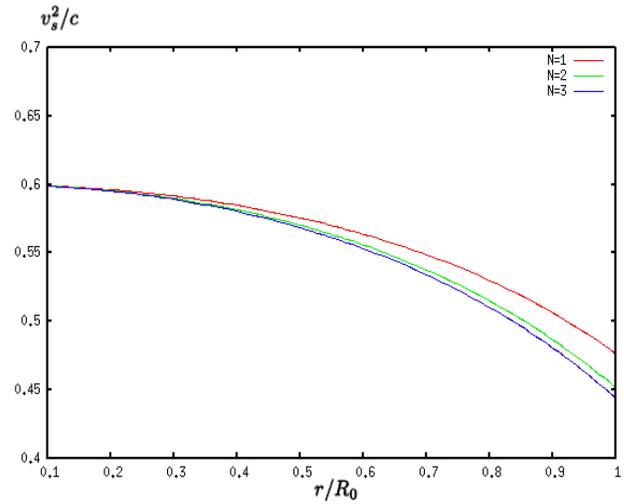


Figura 5.15: Velocidad del sonido contra r para diferentes valores de N , con $W = 0$, Caso 2.

También fue considerado el caso de soluciones anisótropas con el requerimiento matemático adicional de ser conformemente planas. Dos enfoques fueron estudiados: el primero tiene que ver con un método presentado por Stewart B.W. [64] para producir soluciones de fluidos no perfectos con la condición $W = 0$. Se tomó el ejemplo 1 de [64] para construir la función fuente y a partir de allí se generaron tres ecuaciones de estado no locales, como se hizo en el ejemplo anterior. Los perfiles para la densidad, presión radial y presión tangencial pueden verse en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 respectivamente. La Figura 5.8 muestra la relación masa total contra densidad central, se pueden apreciar los valores para la masa máxima alcanzados para cada modelo. El segundo enfoque tiene que ver con la posibilidad de introducir la condición de no localidad directamente en la ecuación que resulta de la condición de hacer el tensor de Weyl igual a cero. Estas dos condiciones juntas permiten cerrar el sistema de las ecuaciones de campo y parte del resultado puede verse en las figuras 5.9-5.11. La Figura 5.12 es una visualización de la forma como las masas máximas son alcanzadas para cada ecuación de estado, correspondiente a los diferentes valores de N . Cuando $N = 1$ se recupera el ejemplo 1 de [64], esto significa que la solución mostrada allí es, además de conformemente plana, no local.

En las figuras 5.13-5.15 se pueden apreciar las velocidades del sonido radial para las tres familias de soluciones consideradas aquí. Todos los modelos tienen la propiedad de que la velocidad del sonido es una función que decrece con r .

Capítulo 6

Un Estudio sobre la estabilidad y fracturas

Resulta de interés estudiar la respuesta de un modelo de objeto compacto cuando se producen fluctuaciones en sus variables físicas, un modelo inestable a perturbaciones de este tipo carece de valor físico. Estos objetos auto-gravitantes pueden presentar desviaciones de su estado de equilibrio si el sistema es perturbado, en [94] se encuentra que la aparición de pequeñas cantidades de anisotropía puede cambiar de manera contundente la evolución de un sistema.

Cuando las distribuciones de materia son apartadas del equilibrio pueden aparecer fuerzas radiales de diferente signo ocasionando la aparición de fracturas [22]. Se dice que ocurre una fractura cuando la fuerza radial está dirigida hacia el centro en la región más interna de la esfera y cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial [44].

Los efectos de fractura pueden describirse a partir de la noción de la aceleración de marea para los elementos contiguos del fluido [23, 3], y puede ser definida como:

$$A^\alpha = \left[-R_{\beta\gamma\mu}^\alpha u^\beta u^\mu + h_\beta^\alpha \left(\frac{du^\beta}{ds} \right)_{;\gamma} - \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du_\gamma}{ds} \right] h_\nu^\gamma \delta x^\nu, \quad (6.1)$$

donde δx^ν es un vector que conecta a dos elementos del fluido vecinos; h_β^α es el proyector en el 3-espacio ortogonal a la cuadrivelocidad u^α y $du^\alpha/ds \equiv u^\mu u_{;\mu}^\alpha$.

Ahora bien, es posible definir a partir de la ecuaciones TOV la siguiente cantidad:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{dP}{dr} + (\rho + P) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \right) - \frac{2}{r} \Delta, \quad (6.2)$$

y demostrar que (6.1) y (6.2), evaluadas inmediatamente después de la perturbación, conduce a la siguiente expresión [23, 24]

$$\mathcal{F} = -\frac{e^{2\lambda}(\rho + P)}{e^\nu r^2} \int_0^R d\tilde{r} e^\nu \tilde{r}^2 \frac{d\Theta}{ds}, \quad (6.3)$$

donde Θ representa la expansión.

La ecuación (6.2) es la ecuación de equilibrio hidrostático, que es idénticamente igual a cero para configuraciones estáticas (o en evolución lenta), \mathcal{F} define la fuerza radial total sobre cada elemento del fluido.

Para que se originen fracturas, es necesario que para algún valor del radio ($0 \leq r \leq R$) la cantidad $d\Theta/ds$ se haga cero dentro de la configuración. Como se puede apreciar en (6.3), existe un efecto no local ya que el cambio de signo en \mathcal{F} no depende del valor de $d\Theta/ds$ en un punto, sino en toda la región por debajo de la fractura.

Cuando el sistema posee distribuciones de presión y densidad que satisfacen $\mathcal{F} = 0$ se dice que el sistema está en equilibrio. La aparición de fluctuaciones en la densidad y anisotropía pueden inducir fuerzas radiales ($\mathcal{F} \neq 0$) que, dependiendo de su distribución espacial, pueden producir cambios de signo en \mathcal{F} .

Por lo tanto, es necesario perturbar el sistema para observar posibles cambios en el signo de \mathcal{F} . Aquí se van a considerar perturbaciones independientes en la densidad $\delta\rho$ y la anisotropía $\delta\Delta$ con el fin de hacer que el sistema, originalmente estable, abandone esta situación de equilibrio.

Una fluctuación en la densidad se propagará en la función masa y la presión radial, a través de la ecuación de estado, de la siguiente manera:

$$\rho + \delta\rho \Rightarrow \begin{cases} P(\rho + \delta\rho, r) \approx P(\rho, r) + \delta P \approx P(\rho, r) + \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta\rho, \\ m(\rho + \delta\rho, r) = 4\pi \int_0^r (\rho + \delta\rho) \bar{r}^2 d\bar{r} \approx m(\rho, r) + \frac{4\pi}{3} r^3 \delta\rho. \end{cases} \quad (6.4)$$

Por otro lado, si se expande (6.2) se obtiene:

$$\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_0(\rho, P, m, \Delta, r) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} \delta\rho + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P} \delta P + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m} \delta m + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta} \delta \Delta}_{\tilde{\mathcal{F}}}, \quad (6.5)$$

donde \mathcal{F}_0 corresponde a la configuración en equilibrio. Utilizando (6.4) se puede mostrar que

$$\tilde{\mathcal{F}} = \delta\rho \left[\left(2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} + \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m} \right) - \frac{2}{r} \frac{\delta \Delta}{\delta \rho} \right], \quad (6.6)$$

con

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} = \frac{m + 4\pi P r^3}{r(r - 2m)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m} = \frac{(\rho + P)(1 + 8\pi P r^2)}{(r - 2m)^2} \geq 0. \quad (6.7)$$

Se puede observar que, a fin de tener un cambio de signo en $\tilde{\mathcal{F}}$, es necesario lo siguiente:

1. Se deben perturbar tanto la anisotropía como la densidad;
2. Las dos cantidades perturbadas deben ser del mismo signo: $\delta\Delta/\delta\rho > 0$.

Por lo tanto, para que una configuración sea potencialmente estable se debe cumplir que $\delta\Delta/\delta\rho \leq 0$ en todo el interior de la esfera para que no ocurran cambios de signo en $\tilde{\mathcal{F}}$.

6.1. Fracturas y las velocidades del sonido

Cuando se consideran perturbaciones independientes en la densidad y la anisotropía local no existen criterios que permitan establecer la funcionalidad de las perturbaciones a través de la distribución de materia. En trabajos anteriores, [22, 23, 24, 95], se establecen pocos criterios físicos para definir la magnitud de las perturbaciones, lo que trae como consecuencia la aparición de escenarios que probablemente no cumplen con las condiciones de aceptabilidad física. Por otra parte, todos esos trabajos previos consideran únicamente perturbaciones constantes para inducir inestabilidades en el sistema.

Cuando se considera que las perturbaciones son independientes, lo que significa es que estas perturbaciones generales provienen de fenómenos físicos que no están relacionados entre sí. En este trabajo el orden de magnitud de las perturbaciones será acotado por el comportamiento de alguna de las variables físicas. Resulta fácil darse cuenta que

$$\frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \sim \frac{\delta(P_{\perp} - P)}{\delta\rho} \sim \frac{\delta P_{\perp}}{\delta\rho} - \frac{\delta P}{\delta\rho} \sim v_{s\perp}^2 - v_s^2, \quad (6.8)$$

donde v_s^2 and $v_{s\perp}^2$ representan las velocidades del sonido radiales y tangenciales, respectivamente.

A través de (6.8) se puede tener una idea más precisa del orden de magnitud de las perturbaciones ($\delta\Delta$ y $\delta\rho$) y de las regiones que tienden a ser potencialmente inestables dentro de la configuración.

Debido a que $0 \leq v_s^2 \leq 1$ y $0 \leq v_{s\perp}^2 \leq 1$, se tiene $|v_{s\perp}^2 - v_s^2| \leq 1$. Entonces:

$$-1 \leq v_{s\perp}^2 - v_s^2 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq v_{s\perp}^2 - v_s^2 \leq 0, & \text{Sistema potencialmente estable,} \\ 0 < v_{s\perp}^2 - v_s^2 \leq 1, & \text{Sistema potencialmente inestable.} \end{cases} \quad (6.9)$$

Por lo tanto, tomando como base el hecho de que existe una diferencia en la propagación del sonido dentro del fluido, es posible evaluar las regiones que pueden llegar a ser inestables y determinar así la aparición de fracturas. Aquella región donde $v_s^2 < v_{s\perp}^2$ será una región inestable, pero si $v_s^2 \geq v_{s\perp}^2$ entonces será una región estable y no será posible la aparición de fracturas. Es importante mencionar que según lo anteriormente expuesto, se tiene que si $P_{\perp} \neq 0$ y $P = 0$ entonces el sistema es siempre potencialmente estable, por el contrario, si $P_{\perp} = 0$ y $P \neq 0$ entonces la perturbación implica inestabilidad.

A lo anterior se le puede agregar el hecho de que la magnitud de la perturbación en la anisotropía siempre debe ser más pequeña que el de la densidad, esto significa que la cantidad: $|v_{s\perp}^2 - v_s^2| \leq 1 \Rightarrow |\delta\Delta| \leq |\delta\rho|$. Cuando $\delta\Delta/\delta\rho > 0$, esas perturbaciones implican modelos potencialmente inestables.

6.2. Perturbaciones, fracturas y la materia anisótropa

Estudiamos ahora la efectividad del criterio de estabilidad para distribución de materia acotadas, recordando que el concepto de fractura se refiere a la tendencia que tiene la configuración a dividirse, y este hecho tiene que ser establecido a partir de la integración del

conjunto completo de las ecuaciones de Einstein. Además, es evidente que algunas perturbaciones pueden producir inestabilidades que lleven al objeto a colapsar o expandirse sin necesidad de producir fracturas.

Con el fin de probar el criterio (6.9) vamos a utilizar diferentes perfiles de densidad para modelos que satisfacen las condiciones de aceptabilidad física. Básicamente, el método consiste en suministrar un perfil de densidad para obtener la presión radial a partir de una ecuación de estado: $P = P(\rho(r))$, luego resolver para la presión tangencial a partir de la ecuación (4.7):

$$P = P(\rho(r)) \rightarrow P_{\perp} = P + \frac{r}{2} \frac{dP}{dr} + \frac{\rho + P}{2} \left[\frac{m + 4\pi r^3 P}{r - 2m} \right]. \quad (6.10)$$

De esta manera, las velocidades del sonido radiales y tangenciales son calculadas y sus diferencias evaluadas. Utilizando (6.9) la estabilidad o inestabilidad podrá ser establecida. Entonces, un cambio de signo en $\tilde{\mathcal{F}}$ descrito por (6.6) y (6.7) confirmará lo anteriormente dicho. El estudio lo llevaremos a cabo analizando cuatro casos cualitativamente diferentes, tomaremos dos ecuaciones de estado locales y dos no locales.

6.2.1. Modelo anisótropo tipo Tolman VI

Este modelo fue introducido por Cosenza, Herrera, Esculpi y Witten [96] tomando como punto de partida la solución singular de Tolman VI [71]. La solución original isótropa Tolman VI carece de significado físico pero tiene cierta similitud con la ecuación de estado para un gas de Fermi relativista con exponente adiabático de 4/3. Utilizando un método heurístico los autores determinan las variables físicas para fluidos anisótropos

$$\rho = \frac{K}{r^2}, \quad P_r = \frac{3}{8\pi r^2} \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{r}{R}}}{7 - 3\sqrt{\frac{r}{R}}} \right), \quad P_{\perp} = \frac{3}{224\pi r^2} \left(\frac{21 - 25\sqrt{\frac{r}{R}}}{7 - 3\sqrt{\frac{r}{R}}} \right). \quad (6.11)$$

Las condiciones de contorno implican que $K = 3/56\pi$ y $R = 81/49$.

La velocidades del sonido se pueden escribir como

$$v_s^2 = \frac{7(7 + 3\frac{r}{R} - 9\sqrt{\frac{r}{R}})}{(7 - 3\sqrt{\frac{r}{R}})^2} \quad \text{y} \quad v_{s\perp}^2 = \frac{3(49 + 25\frac{r}{R} - 70\sqrt{\frac{r}{R}})}{4(7 - 3\sqrt{\frac{r}{R}})^2}. \quad (6.12)$$

Con (6.11) la expresión para (6.6) puede ser obtenida:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{TVI} = \frac{2\delta\rho}{r} \left[\frac{(588 + 180\frac{r}{R} - 672\sqrt{\frac{r}{R}}) v_s^2 + 539 + 195\frac{r}{R} - 658\sqrt{\frac{r}{R}}}{16(7 - 3\sqrt{\frac{r}{R}})^2} - \frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \right]. \quad (6.13)$$

Este modelo es singular en el centro y cerca de la superficie ($r/R \simeq 0,706$) la presión tangencial se hace negativa, sin embargo, la diferencia en la velocidad del sonido a través de la distribución es constante, lo que viene a representar una relación constante para la perturbación [22, 23, 24, 95].

6.2.2. Modelo no local tipo Stewart 1

Este modelo surge de tomar el perfil de densidad propuesto por B. W. Stewart [64] para describir configuraciones acotadas, anisótropas, y conformemente planas.

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(e^{4Kr} + 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}.$$

Como se mostró anteriormente, cuando se consideraron distribuciones no locales, las presiones radiales y tangenciales son

$$P = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(1 - e^{2Kr})(e^{4Kr} - 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}, \quad (6.14)$$

$$P_{\perp} = \frac{2K^2 e^{4Kr}}{\pi[1 + e^{2Kr}]^4}. \quad (6.15)$$

donde

$$K = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (6.16)$$

De (6.2.2), (6.14) y (6.15) las correspondientes expresiones para las velocidades del sonido son las siguientes:

$$v_{sr}^2 = \frac{8Kre^{2Kr} \left[(e^{4Kr} - 1) + Kr \left[(e^{2Kr} - 2)^2 - 3 \right] \right] - (e^{4Kr} - 1)^2}{(e^{4Kr} - 1)^2 + 8K^2 r^2 e^{2Kr} \left[(e^{2Kr} - 2)^2 - 3 \right]}, \quad (6.17)$$

$$v_{s\perp}^2 = \frac{32K^3 r^3 e^{4Kr} (e^{2Kr} - 1) (e^{2Kr} + 1)^{-1}}{(e^{4Kr} - 1)^2 + 8K^2 r^2 e^{2Kr} \left[(e^{2Kr} - 2)^2 - 3 \right]}. \quad (6.18)$$

La ecuación (6.6) se puede evaluar para este modelo, lo cual resulta en

$$\tilde{\mathcal{F}}_{NLStw1} = \frac{2\delta\rho}{r} \left[\frac{\left[(e^{2Kr} + 1) (5 + v_{sr}^2) + 4Kr (e^{2Kr} - 1) \right] Kr}{6 (e^{2Kr} + 1)^2 (e^{2Kr} - 1)^{-1}} - \frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \right]. \quad (6.19)$$

6.2.3. Modelo no local tipo Stewart 2

Para este modelo, consideremos la solución estática obtenida en el capítulo anterior, cuando juntamos la teoría no local con la condición del tensor de Weyl igual a cero, esto es, las ecuaciones (4.91), (4.92) y (4.93):

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 - \frac{\sin(2Kr)}{Kr} + \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right], \quad (6.20)$$

$$P = -\frac{1}{8\pi r^2} \left[1 + \frac{\sin(2Kr)}{Kr} - 3 \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right], \quad (6.21)$$

$$P_{\perp} = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 - \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right]. \quad (6.22)$$

Como se determinó anteriormente

$$K = \frac{\sqrt{\frac{M}{R} \left(4 - \frac{9M}{R}\right)}}{R - 2M}.$$

A partir de (6.20), (6.21) y (6.22) las correspondientes expresiones para la velocidad del sonido son:

$$v_{sr}^2 = \frac{\sin^2(Kr) (3 - K^2 r^2) - \frac{3}{2} \sin(2Kr) Kr}{[\cos(Kr) Kr - \sin(Kr)]^2} \quad \text{y} \quad v_{s\perp}^2 = \frac{\frac{Kr}{2} \left[Kr + \frac{\sin(2Kr)}{2} \right] - \sin^2(Kr)}{[\cos(Kr) Kr - \sin(Kr)]^2}. \quad (6.23)$$

Y ahora, la ecuación (6.6) puede ser evaluada para este modelo

$$\tilde{\mathcal{F}}_{NLStw2} = \frac{2\delta\rho}{r} \left[\frac{2 \sin(2Kr) Kr - 9 \sin^2(Kr) (v_{sr}^2 + 1)}{12 \sin^4(Kr) [\sin(2Kr) Kr - 2 \sin^2(Kr)]^{-1}} - \frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \right]. \quad (6.24)$$

6.2.4. Modelo Florides-Stewart-Gokhroo & Mehra

Para este modelo vamos a tomar la solución estática, anisótropa, presentada por M. K. Gokhroo y A. L. Mehra [66]. Esta solución fue considerada anteriormente, Capítulo 4, para generar una solución no local. Consideremos aquí nuevamente la solución original, es decir:

$$\rho = \rho_c \left(1 - \frac{Kr^2}{R^2}\right), \quad (6.25)$$

$$P = \frac{\rho_c}{j} \left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^2} \left[\frac{5 - \frac{3Kr^2}{R^2}}{5 - 3K}\right]\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n, \quad (6.26)$$

$$P_{\perp} = P + \frac{\rho_c}{j} \left[\frac{3\mu K}{5 - 3K} \eta^4 (1 - \eta^2)^n + \eta^2 \frac{e^{\lambda}}{2} \left[\frac{15\mu e^{-2\lambda}}{j(5 - 3K)} (1 - \eta^2)^{2n} - 2\pi e^{-2\lambda} (1 - \eta^2)^{n-1} + \frac{5\mu j}{5 - 3K} \left(1 - \frac{3}{5} K \eta^2\right) (1 - K \eta^2) \right] \right], \quad (6.27)$$

con

$$\mu = \frac{M}{R}, \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mu\eta^2 (5 - 3K\eta^2)}{5 - 3K} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{r}{R}.$$

y ρ_c es la densidad en el centro de la configuración de materia y j un parámetro arbitrario.

De (6.25), (6.26) y (6.27) se tiene que:

$$v_s^2 = \frac{2\mu (5 - 6K\eta^2) [1 - (1 + n)\eta^2] + n [5 - 3K(1 + 2\mu\eta^4)]}{Kj(5 - 3K)(1 - \eta^2)^{1-n}}, \quad (6.28)$$

y

$$v_{s\perp}^2 = v_{sr}^2 - \frac{1}{2jK\eta} \left[\frac{6\mu K \eta^3 [2 - \eta^2(2 + n)]}{(5 - 3K)(1 - \eta^2)^{1-n}} + \frac{\eta}{e^{-\lambda}} \left[\phi \left(1 - \frac{\eta\xi}{2e^{-\lambda}}\right) + \frac{\eta\xi}{2} \right] \right], \quad (6.29)$$

| Perfil de Densidad | M/R | $M(M_\odot)$ | z_R | $\rho_R \times 10^{14} (gr/cm^3)$ | $\rho_c \times 10^{15} (gr/cm^3)$ |
|------------------------|-------|--------------|-------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Tolman VI | 0.21 | 1.42 | 0.31 | 2.30 | – |
| NL Stewart 1 | 0.32 | 2.15 | 0.65 | 6.80 | 1.91 |
| NL Stewart 2 | 0.39 | 2.68 | 1.19 | 8.49 | 2.14 |
| Gokhroo y Mehra | 0.26 | 1.76 | 0.44 | 0.00 | 2.09 |

Cuadro 6.1: Los parámetros se han seleccionado de manera tal que puedan representar un objeto compacto de radio $R = 10$ Km y para que la función masa satisfaga completamente todas las condiciones de energía y aceptabilidad física.

donde:

$$\Xi = \frac{30\mu e^{-\lambda} (1 - \eta^2)^{2n}}{j(5 - 3K)} \left[\xi - \frac{2n\eta e^{-\lambda}}{1 - \eta^2} \right] - \frac{4\mu j K \eta (4 - 3K\eta^2)}{5 - 3K} - 4\pi e^{-\lambda} \left[\xi - \frac{\eta e^{-\lambda}}{1 - \eta^2} \right] (1 - \eta^2)^{n-1}, \quad (6.30)$$

$$\phi = \frac{1}{5 - 3K} \left[(1 - \eta^2)^{2n} e^{-2\lambda} \left[\frac{15\mu}{j} - \frac{2\pi(5 - 3K)}{(1 - \eta^2)^{n+1}} \right] + \frac{\mu j (5 - 3K\eta^2)}{(1 - K\eta^2)^{-1}} \right] \quad (6.31)$$

y

$$\xi = -\frac{4\mu\eta(5 - 6K\eta^2)}{5 - 3K}. \quad (6.32)$$

Para este ejemplo (6.6) resulta en

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{GM} = \frac{2\delta\rho}{r} & \left[\frac{2\mu v_s^2}{(5 - 3K) j e^{-2\lambda} a \eta} \left[\eta^2 [15e^{-\lambda} (1 - \eta^2)^n - j(5 - 6K\eta^2)] \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\mu(5 - 3K\eta^2) [15e^{-\lambda} (1 - \eta^2)^n + j(10 - 9K\eta^2)]}{5 - 3K} \right] \right. \\ & \left. - \frac{6\mu\eta^4}{(5 - 3K)^2 j^2} \left[j^2 (9K^2\eta^4 + 25) + 30j [e^{-\lambda} (1 - \eta^2) K - j] \eta^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 75e^{-2\lambda} (1 - \eta^2)^{2n} \right] - \frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \right]. \quad (6.33) \end{aligned}$$

6.2.5. Los modelos

Como se puede apreciar a partir de los datos de la Tabla 6.1, todos los modelos corresponden a una distribución de materia con radio de 10 Km y una masa total M en términos de la masa solar M_\odot . Estos son los valores típicos esperados para objetos astrofísicos compactos tipo estrellas de neutrones. En la tabla también se muestran otros parámetros característicos de estos objetos: el corrimiento al rojo en la superficie z_R , la densidad central ρ_c y la densidad en la superficie ρ_R .

6.3. Discusión

Las curvas para la velocidad del sonido radial y tangencial, así como también su diferencia $v_{s\perp}^2 - v_s^2$, se muestran en la figura 6.1. La relación para la perturbación $\delta\Delta/\delta\rho \equiv v_{s\perp}^2 - v_s^2$ satisface totalmente la restricción $-1 \leq \delta\Delta/\delta\rho \leq 1$ en todos los modelos considerados aquí.

Se puede apreciar que $\delta\Delta/\delta\rho$ es constante para el modelo Tolman VI (Cuadro I en la Figura 6.1) Este tipo de relación fue estudiado en trabajos previos [22, 23, 24, 95]. Como $\delta\Delta/\delta\rho < 0$, nuestro criterio de estabilidad (6.9) nos dice que el modelo anisótropo Tolman VI no se fractura. Los modelos no locales Stewart son mostrados en los cuadros II y III respectivamente. Debido a que $-1 \leq \delta\Delta/\delta\rho \leq 0$ estos dos modelos tampoco presentan fracturas en su interior.

Un escenario más interesante se tiene para el modelo Florides-Stewart-Gokhroo-Mehra con $j = 7$, $K = 1$ and $n = 2$, como se puede apreciar en el cuadro IV. Es evidente en este cuadro que la relación de perturbación: $\delta\Delta/\delta\rho$ no solo presenta un perfil variable sino que también cambia de signo. Este modelo muestra dos regiones potencialmente inestables: $0 \lesssim \eta = r/R \lesssim 0,2570$ y $0,7565 \lesssim \eta = r/R \lesssim 1$ donde $\delta\Delta/\delta\rho > 0$.

Las curvas que representan la función \mathcal{F} se pueden ver en la Figura 6.2, de manera que los criterios de estabilidad considerados anteriormente pueden ser comparados con el cambio en el signo para las expresiones: (6.13), (6.19), (6.24) y (6.33). Es fácil reconocer en esta figura que los modelos Tolman VI, NL Stewart 1 y NL Stewart 2 no presentan fracturas en ningún punto de la distribución de materia (cuadros I, II y III respectivamente). Mientras que para el modelo Florides-Stewart-Gokhroo-Mehra se aprecia una fractura en $\eta \approx 0,17986$ dentro de la primera región potencialmente inestable: $0 \lesssim \eta = r/R \lesssim 0,2570$.

En resumen, para algunos tipos particulares de perturbaciones, la razón para las fluctuaciones de anisotropía y densidad $\delta\Delta/\delta\rho$ se pueden interpretar en términos de la diferencia de las velocidades del sonido $\delta\Delta/\delta\rho \sim v_{s\perp}^2 - v_s^2$. De (6.9) se tiene que las regiones donde $v_s^2 < v_{s\perp}^2$ serán regiones potencialmente inestables, en caso contrario, si $v_s^2 \geq v_{s\perp}^2$ entonces no ocurrirán fracturas y la región será una región potencialmente estable.

Esta interpretación permite hacer una redefinición del concepto de fractura, al relacionarlas con regiones de inestabilidad debido al comportamiento de alguna de las variables físicas, dentro de la configuración de materia. Como se mencionó anteriormente, la diferencia en las velocidades del sonido claramente permite identificar, vía ecuación (6.6), las regiones que tienden a ser inestables. Esto se puede apreciar en la Figura 6.2, cuadro IV, donde se muestra un punto de fractura en $\eta \approx 0,17986$ para el modelo Florides-Stewart-Gokhroo-Mehra.

Por otra parte, debido a que la velocidad del sonido tiene que ser menor que la velocidad de la luz, entonces la diferencia de velocidades tiene la restricción:

$$|\delta\Delta/\delta\rho| \sim |v_{s\perp}^2 - v_s^2| \leq 1.$$

Esta restricción es muy importante a la hora de caracterizar un determinado modelo, ya que es posible encontrar fracturas dentro de configuraciones para un conjunto de fluctuaciones en la anisotropía y en la densidad que no son físicamente aceptables, es decir, $|\delta\Delta/\delta\rho| > 1$.

Un comentario adicional con respecto al cociente $\delta\Delta/\delta\rho$ es que esta relación no tiene que ser constante, como en [22, 23, 24, 95], donde se utilizaron otros criterios para estudiar el cambio de signo de \mathcal{F} .

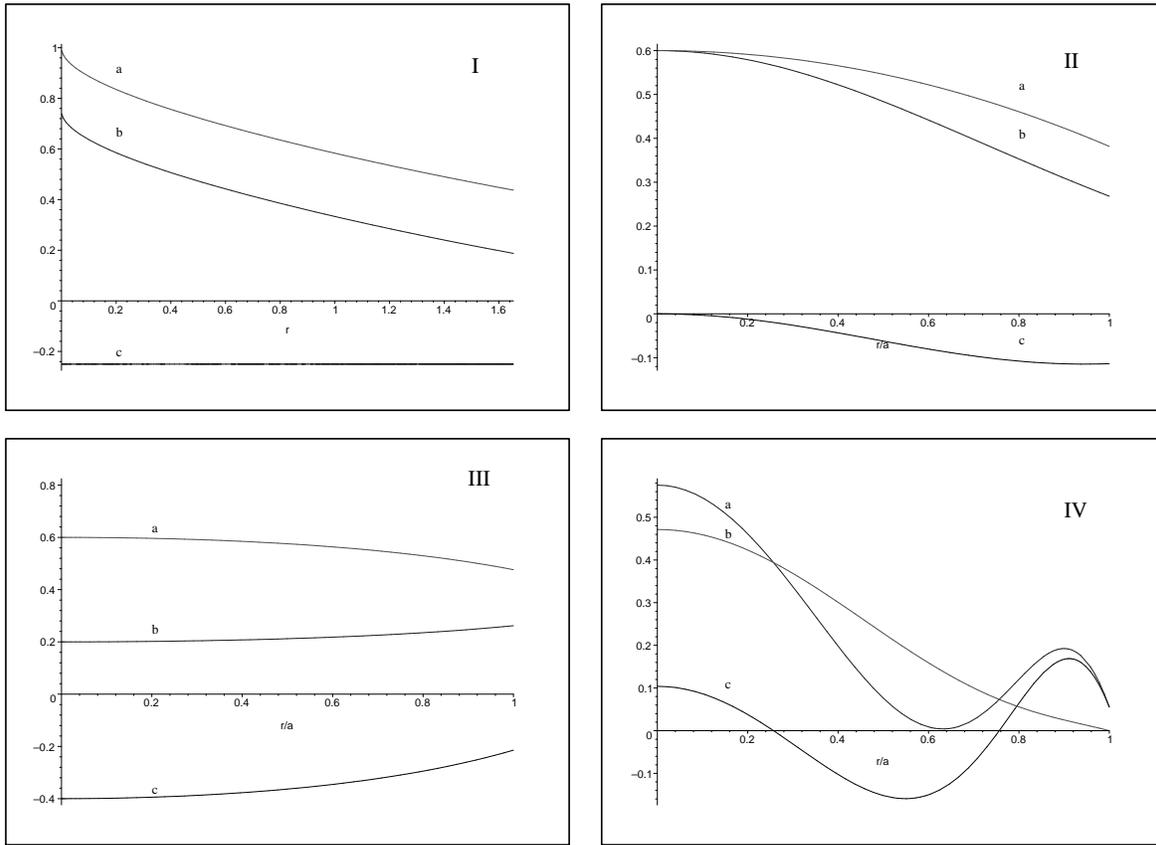


Figura 6.1: Variaciones de las velocidades del sonido radial y tangencial. Los cuadros I, II, III y IV representan Tolman VI, NL Stewart 1, NL Stewart 2 y Gokhroo & Mehra, respectivamente. Las curvas a , b y c corresponden a v_s^2 , $v_{s\perp}^2$ y $v_{s\perp}^2 - v_s^2$ respectivamente.

Para el caso de configuraciones de materia extremas, como las estudiadas anteriormente cuando consideramos $P_\perp \neq 0$ y $P = 0$, se puede mencionar que estas son siempre potencialmente estables, mientras que el otro escenario: $P_\perp = 0$ y $P \neq 0$ podrían ser posibles escenarios donde el fenómeno de fractura puede llegar a suceder.

Los modelos de objetos compactos no deberían ser inestables debido a fluctuaciones de sus variables físicas, ya que si se comportan como objetos inestables estos deberían seguir algún tipo de comportamiento particular, como colapsar, expandirse o fragmentarse. En este sentido, las perturbaciones juegan un papel importante para identificar de qué manera el objeto compacto puede llegar a evolucionar. Otros tipos de perturbaciones que pueden conducir a situaciones de colapso o expansión pueden ser consultados revisando el formalismo de Chandrasekhar [97, 98].

Para finalizar, es bueno recalcar el hecho de que los diferentes patrones de evolución para configuraciones inestables son sólo una tendencia, es decir, que el comportamiento y la evolución temporal posterior del objeto debe establecerse a partir de la integración del conjunto completo de las ecuaciones de Einstein.

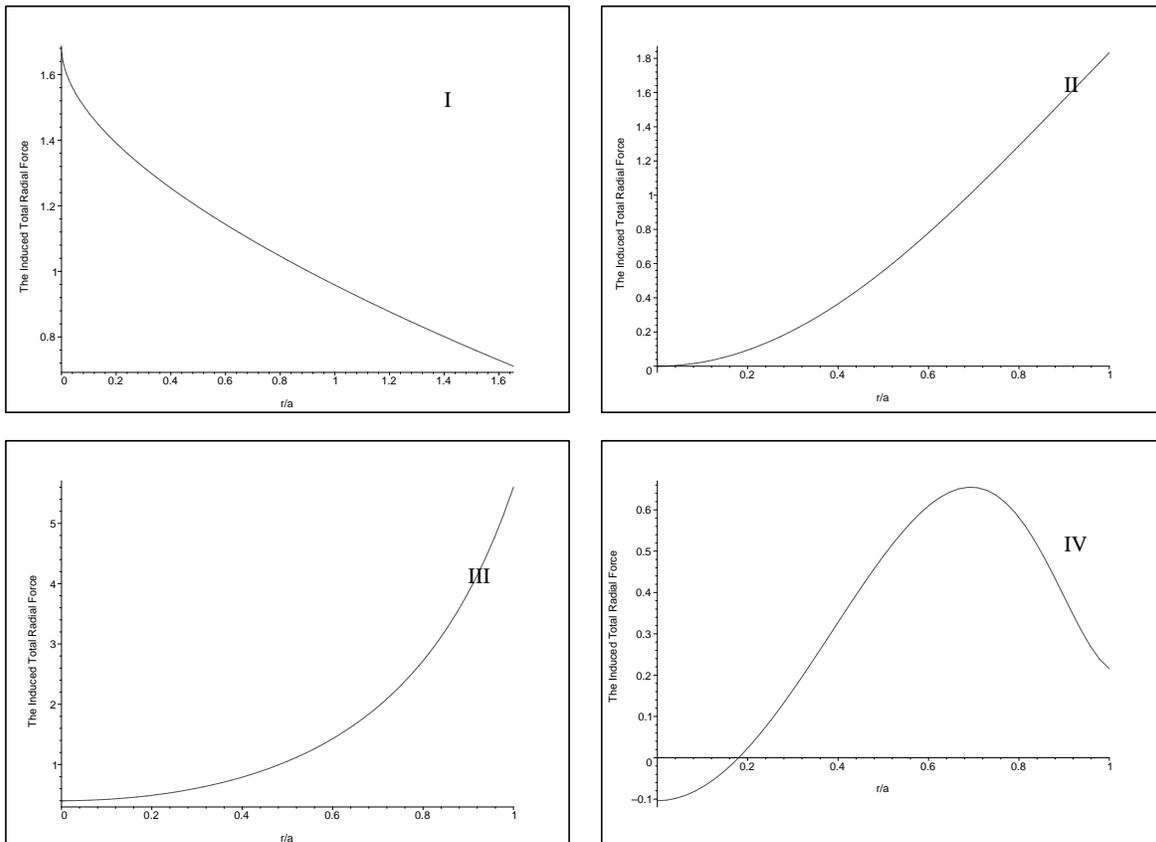


Figura 6.2: Fuerza radial inducida $\tilde{\mathcal{F}}$ para las configuraciones anisótropas. Los cuadros I, II, III y IV corresponden a los modelos Tolman VI, NL Stewart 1, NL Stewart 2 y Gokhroo & Mehra, respectivamente.

Capítulo 7

Soluciones exactas dinámicas con una EENL

En este capítulo se pretende estudiar posibles escenarios de colapso gravitacional de objetos compactos descritos por una EENL. La idea principal consiste en resolver el conjunto de ecuaciones de campo de manera analítica, es decir, sin recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, al final del capítulo se desarrollará un método semi-numérico para el estudio de la evolución del colapso de estrellas con el fin de establecer, en la medida de las posibilidades, algunas comparaciones entre ambos métodos.

A diferencia del caso newtoniano, donde la masa es la única fuente de gravedad, en la teoría General de la Relatividad todas las formas de energía producen campos gravitacionales. La presión, por ejemplo, juega un papel muy diferente al que juega en la teoría de Newton ya que además de ser ella misma fuente de campo gravitacional es ésta la que en última instancia sostiene a la estrella en contra del colapso. Los objetos compactos, como las estrellas de neutrones, son estables a medida que la presión de Fermi de los neutrones degenerados logran contrarrestar la atracción gravitacional. Un medio material degenerado tiene que ver con el hecho de que la temperatura es mucho más pequeña que la energía de Fermi de los neutrones de manera que todos los niveles energéticos permitidos están ocupados, y por el principio de exclusión de Pauli, no hay cabida para estados adicionales: no hay la posibilidad de que dos fermiones puedan tener los mismos números cuánticos. Una ruptura de este equilibrio, por alguna inestabilidad, puede dar origen a una situación de colapso del medio material originando un aumento en la densidad, lo que a la vez trae como consecuencia una mayor repulsión debido al aumento de las fuerzas nucleares de corto rango, incrementando la presión de Fermi. El aumento de la densidad y el exceso de neutrones hace que las propiedades de la materia cambien considerablemente, encontrar una ecuación de estado que describa todos estos cambios es un hecho muy difícil de realizar.

Como ya se ha mencionado, para construir un modelo estelar se requiere el poder suministrar una ecuación de estado. Consideremos entonces que la materia viene descrita por una ecuación de la forma (3.27), que supondremos válida para un fluido material con densidades

mayores a la densidad nuclear, es decir $\rho > \rho_0$. Esto es:

$$P = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \left[\frac{\rho + 2q\omega + P\omega^2}{1 - \omega^2} \right] d\bar{r}, \quad (7.1)$$

donde $P = P(t, r)$, $\rho = \rho(t, r)$, $q = q(t, r)$ y $\omega = \omega(t, r)$.

Como ya se discutió con anterioridad, la ecuación (7.1) se puede escribir de manera equivalente como una ecuación diferencial:

$$\rho - 3P + r(\rho' - P') - 4\omega q - [3\rho - P + r(\rho' - P')] \omega^2 = 0. \quad (7.2)$$

Es interesante notar que es posible acomodar la ecuación (7.2), utilizando (7.1), de la manera siguiente:

$$\rho - 3P + r(\rho' - P') = \frac{2(\rho + P)\omega^2 + 4q\omega}{1 - \omega^2}. \quad (7.3)$$

Ahora bien, si ρ y P tienen una dependencia en r de manera tal que satisfacen la ecuación

$$\rho - 3P + r(\rho' - P') = 0, \quad (7.4)$$

entonces, de (7.3) se obtiene que la velocidad del material es:

$$\omega = -\frac{2q}{(\rho + P)}. \quad (7.5)$$

Debe quedar claro que con (7.5) la ecuación (7.2) es satisfecha, además, es fácil ver que si el medio material radía energía, $q > 0$, el sistema colapsará, $\omega < 0$, en el caso contrario, el objeto se expandirá.

Sustituyendo (7.5) en la ecuación de campo (3.44) resulta

$$q = \frac{2q(\rho + P)}{(\rho + P)^2 + 4q^2} - \left[\frac{(\rho + P)^2 - 4q^2}{(\rho + P)^2 + 4q^2} \right] \frac{\dot{\lambda} e^{-(2\lambda + \kappa)}}{4\pi r}. \quad (7.6)$$

Las soluciones de (7.6) vienen dadas por

$$q_1 = \frac{\dot{\lambda} e^{-(2\lambda + \kappa)}}{4\pi r}, \quad q_2 = \frac{1}{2}(\rho + P), \quad q_3 = -\frac{1}{2}(\rho + P). \quad (7.7)$$

Es claro que

$$q_{2,3} = \pm \frac{1}{2}(\rho + P) \Rightarrow \omega = \mp 1. \quad (7.8)$$

Por lo tanto, la condición (7.4) conduce a que necesariamente

$$q = \frac{\dot{\lambda} e^{-(2\lambda + \kappa)}}{4\pi r}. \quad (7.9)$$

Esta última ecuación refleja el hecho de que, en estas coordenadas, el colapso conducido vía la **EENL** no puede ser del tipo adiabático, es decir, con $q = 0$. Según (7.9), al no existir

radiación desaparecerá la dependencia temporal de la función λ , reduciendo así nuestro problema al caso estático.

En el borde de la distribución, $R(t) \equiv r_s(t)$, las condiciones de contorno $P_s = q_s$ llevan a que (3.49) implique lo siguiente:

$$\Omega \equiv \dot{R} = -\frac{2e^\kappa P_s}{(\rho_s + P_s)}. \quad (7.10)$$

Por lo tanto, la solución de (7.10) permitirá seguir la evolución del borde de la distribución para un conjunto de condiciones iniciales.

7.1. Evolución en coordenadas de Schwarzschild

Con el fin de explorar la contribución de una **EENL** en la hidrodinámica presente en el colapso gravitacional de un objeto compacto, se considerará que la función densidad de energía $\rho(t, r)$ tiene la misma dependencia en r que la densidad $\rho(r)$ de una solución estática conocida. Esta consideración, por lo tanto, impone que (7.4) sea satisfecha.

El conjunto de ecuaciones de campo, en el interior de la distribución de materia, queda ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{e^{-2\lambda} \left[(2r\lambda' - e^{2\lambda} + 1) \omega^2 - 1 + 2r\lambda' - 4r\omega\dot{\lambda}e^{-\kappa} \right] + 1}{8\pi r^2 (1 - \omega^2)}, \\ P &= \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad q = \frac{\dot{\lambda} e^{-(2\lambda+\kappa)}}{4\pi r}, \\ P_\perp &= -\frac{e^{-2\lambda}}{8\pi} \left[(\ddot{\lambda} - \dot{\kappa}\dot{\lambda}) e^{-2\kappa} - \lambda'' \right]. \quad \text{Con } \omega = -\frac{2q}{(\rho + P)}. \end{aligned}$$

Para poder hallar todas las magnitudes físicas será necesario determinar la función $\lambda(t, r)$ como se muestra en los dos ejemplos que vienen a continuación.

7.1.1. Modelo 1

Consideremos el perfil de densidad propuesto por P.S. Florides [65], que también corresponde a diferentes soluciones: la de Stewart [64] (ejemplo 4) y la de M. K. Gokhroo y A. L. Mehra [66], esta última, bajo circunstancias particulares [67], da origen a una ecuación de estado similar a la newtoniana para materia nuclear de Bethe-Börner-Sato [3, 4, 68]. Como ya fue señalado en el Capítulo 4, estas soluciones son equivalentes a las soluciones del tipo Tolman VII donde: $e^{-2\lambda} = 1 - Ar^2 + Br^4$.

La solución estática que tomaremos para este primer modelo tiene que ver con el perfil de densidad tal y como aparece en [66], y lo denominaremos el modelo (G-M). El perfil de densidad es el siguiente:

$$\rho(r) = \bar{\rho}_c \left[1 - K \frac{r^2}{R^2} \right], \quad 0 \leq K \leq 1, \quad (7.11)$$

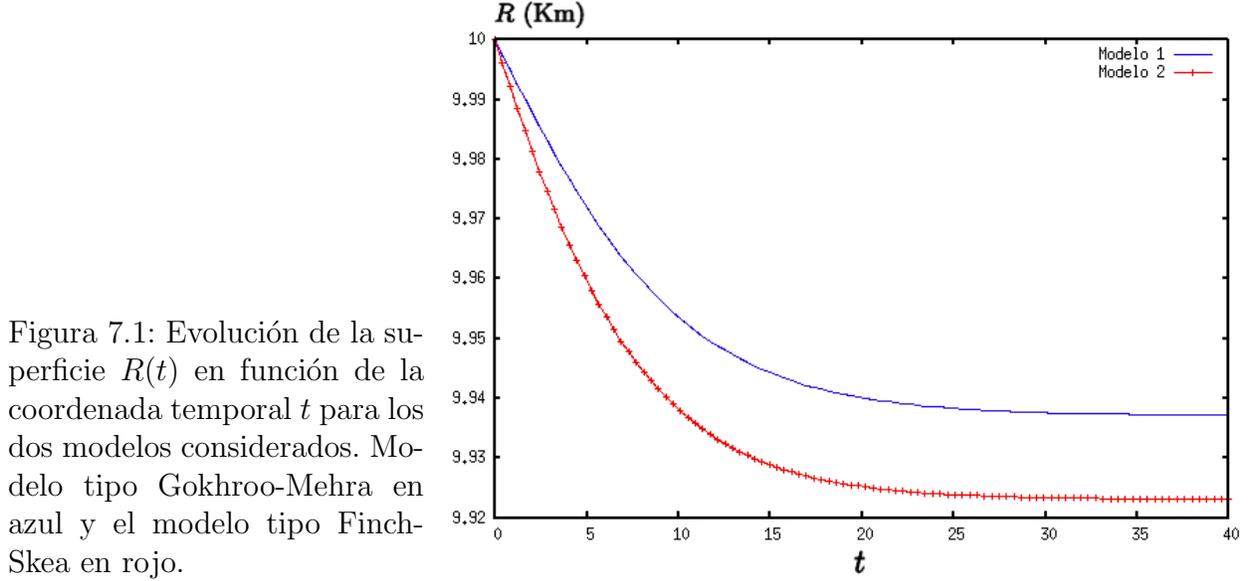


Figura 7.1: Evolución de la superficie $R(t)$ en función de la coordenada temporal t para los dos modelos considerados. Modelo tipo Gokhroo-Mehra en azul y el modelo tipo Finch-Skea en rojo.

donde $\bar{\rho}_c$ es la densidad central, K es una constante y R el radio de la esfera.

La propuesta en este trabajo consiste en suponer que la función densidad-energía tiene la siguiente forma:

$$\rho(t, r) = \rho_c(t) \left[1 - \frac{K(t)}{R(t)^2} r^2 \right], \quad (7.12)$$

con $0 \leq K(t) \leq 1$. Ahora, la presión se puede determinar vía la ecuación (7.4)

$$P(t, r) = \frac{1}{3} \rho_c(t) \left[1 - \frac{9K(t)}{5R(t)^2} r^2 \right]. \quad (7.13)$$

Por lo tanto, por (3.46), la función masa es

$$m(t, r) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 \left[1 - \frac{3K}{5R^2} r^2 \right] \Rightarrow e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (7.14)$$

De (7.9) resulta

$$q(t, r) = -\frac{r e^{-\kappa}}{15R^3} \left[3r^2 \rho_c (R\dot{K} - 2K\dot{R}) - \dot{\rho}_c R (5R^2 - 3r^2 K) \right], \quad (7.15)$$

y de (7.15) y (7.5) es fácil obtener la velocidad radial

$$\omega(t, r) = \frac{r e^{-\kappa}}{2R\rho_c} \left[\frac{3r^2 \rho_c (R\dot{K} - 2K\dot{R}) - \dot{\rho}_c R (5R^2 - 3r^2 K)}{5R^2 - 6Kr^2} \right]. \quad (7.16)$$

Se puede apreciar que $\rho_c(t)$, en (7.14), se relaciona con la masa total de la esfera $M(t)$ de la manera siguiente

$$r = R \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{15M}{4\pi R^3 [5 - 3K]}. \quad (7.17)$$

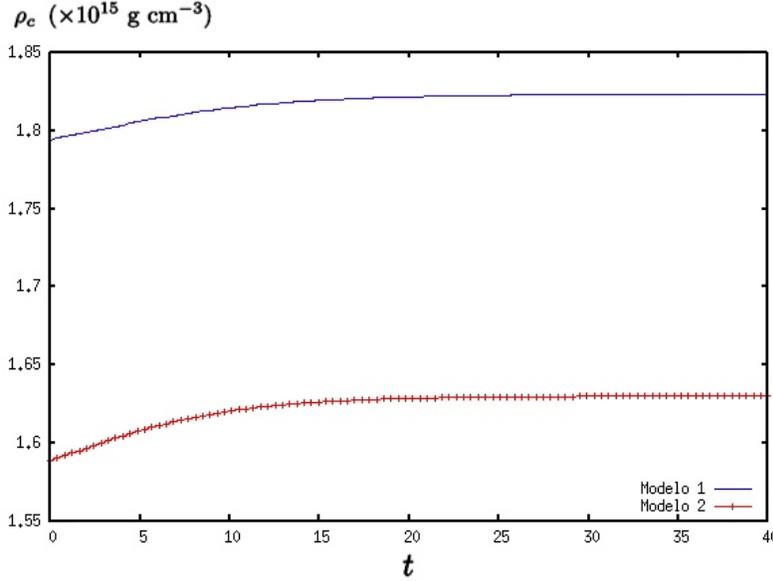


Figura 7.2: Densidad central, para ambos modelos, en función del tiempo de evolución. Modelo tipo Gokhroo-Mehra en azul y el modelo tipo Finch-Skea en rojo.

Una consecuencia de (7.10) y de (7.16), evaluada en la superficie, es la importante relación:

$$\dot{R} = \frac{\dot{M}R}{M} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_0}{M_0} \exp \left[\int \frac{\dot{M}}{M} dt \right], \quad (7.18)$$

donde R_0 es la superficie inicial y M_0 la masa inicial. Se puede notar que la ecuación (7.18) implica que $\dot{\kappa} = 0$, es decir, el potencial gravitacional en la superficie permanecerá constante durante todo el colapso.

En virtud de (7.17), (7.18) y de la condición de borde $P_s = q_s$, se puede determinar la función $K(t)$

$$K(t) = \frac{5}{3} \left[\frac{M + 2R\dot{M}e^{-\kappa}}{3M + 4R\dot{M}e^{-\kappa}} \right]. \quad (7.19)$$

Se tiene entonces que la evolución de radio exterior $R(t)$ está dado por (7.18). Esta ecuación puede ser resuelta analíticamente si un perfil para $M(t)$ es suministrado. Se supondrá un pulso gaussiano centrado en τ para $M(t)$:

$$M(t) = [M_0 - M_f] \frac{e^{(-\frac{\tau}{\sigma})} + 1}{e^{(\frac{t-\tau}{\sigma})} + 1} + M_f, \quad (7.20)$$

con σ como el ancho del pulso y M_f la masa final. La diferencia $M_0 - M_f$ representa la masa radiada durante el proceso de colapso. El conjunto de condiciones iniciales y parámetros para este modelo son: (El subíndice cero indica que la cantidad es evaluada en $t = 0$.)

| | |
|--------------------------|---|
| $R_0 = 10,00 \text{ Km}$ | $K_0 = 0,5516180$ |
| $M_0 = 1,59M_\odot$ | $\rho_{c0} = 1,79 \times 10^{15} \text{ gr/cm}^3$ |
| $M_f = 1,58M_\odot$ | $\rho_{s0} = 8,05 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$ |
| $\tau = -1,0$ | $\Omega_0 = -0,010 \text{ c}$ |
| $\sigma = 5,5$ | |

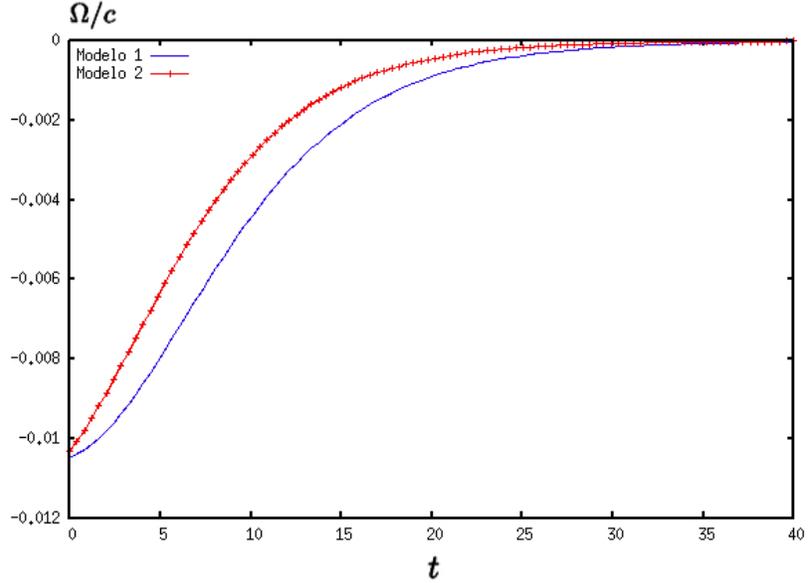


Figura 7.3: Velocidad de la superficie de la esfera, para ambos modelos, en función del tiempo de evolución t . Modelo tipo Gokhroo-Mehra en azul y el modelo tipo Finch-Skea en rojo.

7.1.2. Modelo 2

Otra solución a estudiar es la solución obtenida por Finch y Skea [69] y que ya fue también considerada en el Capítulo 4. Los autores presentan la solución correcta de un ansatz propuesto por Duorah y Ray (1987). Esta solución es una generalización de la solución de Durgapal y Bannerji en [70].

La solución estática tal y como aparece en [69] es la siguiente:

$$\frac{8\pi\rho(r)}{C} = \frac{(1-K)(3+Cr^2)}{(1+Cr^2)^2}, \quad (7.21)$$

donde C y K son constantes. Nos referiremos a este modelo 2 como (F-S).

Para construir una configuración dinámica, se va a suponer que

$$\rho(t, r) = \frac{\rho_c(t)}{3} \frac{3 + C(t)r^2}{[1 + C(t)r^2]^2} \Rightarrow P(t, r) = \frac{\rho_c(t)}{3} \frac{1 - C(t)r^2}{[1 + C(t)r^2]^2}, \quad (7.22)$$

donde $\rho_c(t)$ y $C(t)$ son funciones a determinar. De nuevo, es fácil chequear que (7.22) satisface (7.4).

Así, de la ecuación (3.46) se obtiene la función masa:

$$m(t, r) = \frac{4\pi\rho_c}{3} \frac{r^3}{1 + Cr^2}. \quad (7.23)$$

De (7.9), el campo de radiación:

$$q(t, r) = \frac{re^{-\kappa}}{3} \frac{\dot{\rho}_c [1 + Cr^2] - r^2 \rho_c \dot{C}}{[1 + Cr^2]^2}. \quad (7.24)$$

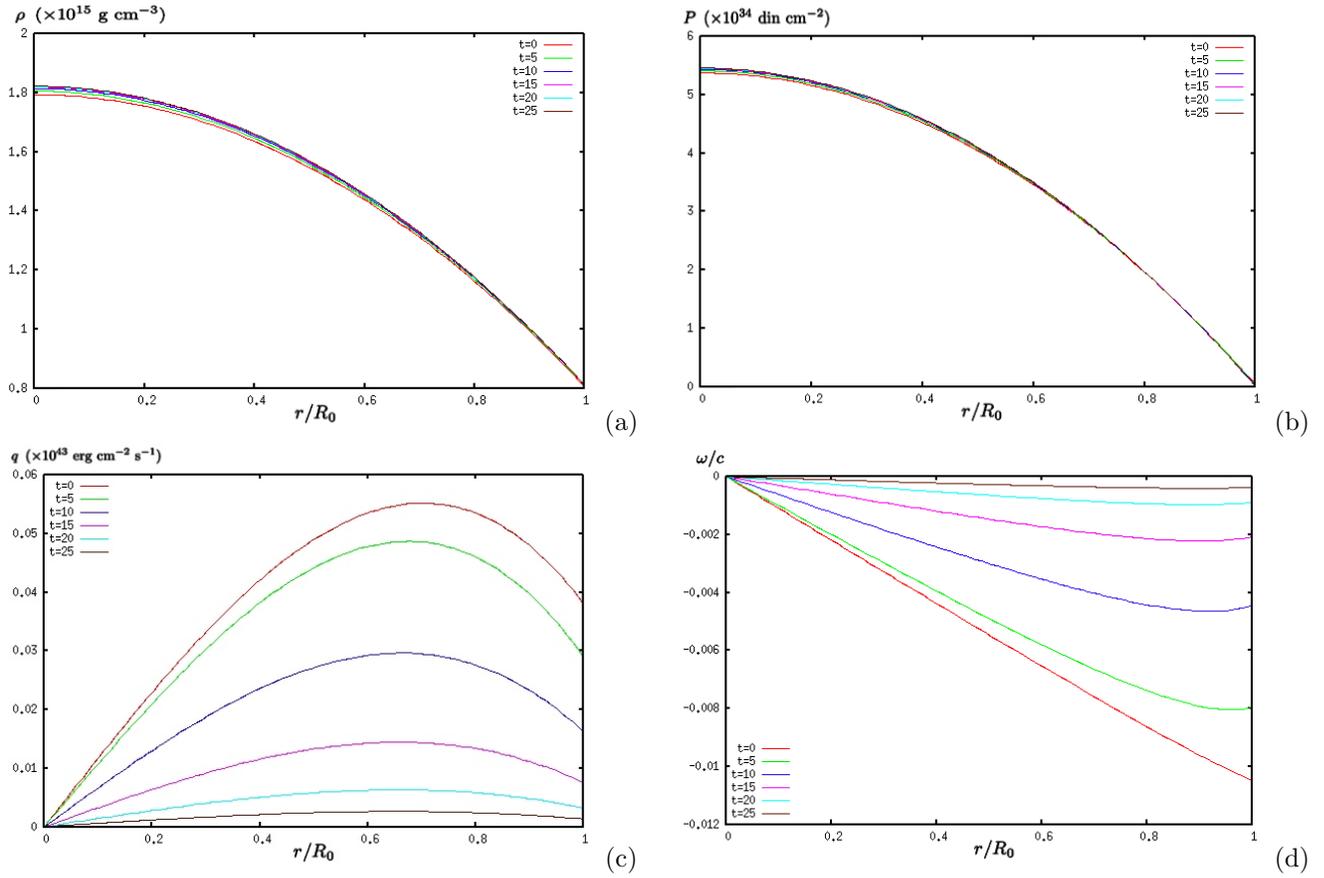


Figura 7.4: Variables físicas para el modelo (G-M) en función del radio: en (a) y (b) se aprecian los perfiles de densidad y presión radial respectivamente. En (c) el flujo de calor y en (d) la velocidad del material en la dirección radial.

Y usando (7.24) y (7.5) la velocidad radial:

$$\omega(t, r) = -\frac{re^{-\kappa}}{2\rho_c} \left[\dot{\rho}_c [1 + Cr^2] - r^2 \rho_c \dot{C} \right]. \quad (7.25)$$

La densidad central $\rho_c(t)$ se relaciona con la masa total $M(t)$ de la esfera por

$$r = R \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{3M}{4\pi R^3} [1 + CR^2]. \quad (7.26)$$

De nuevo, la evolución del radio exterior $R(t)$ estará dada por (7.18) y (7.20) y el modelo evolucionará manteniendo el potencial en la superficie constante.

Con (7.18), (7.26) y de la condición $P_s = q_s$, la función $C(t)$ queda como

$$C(t) = \frac{2R\dot{M}e^{-\kappa} + M}{R^2M}. \quad (7.27)$$

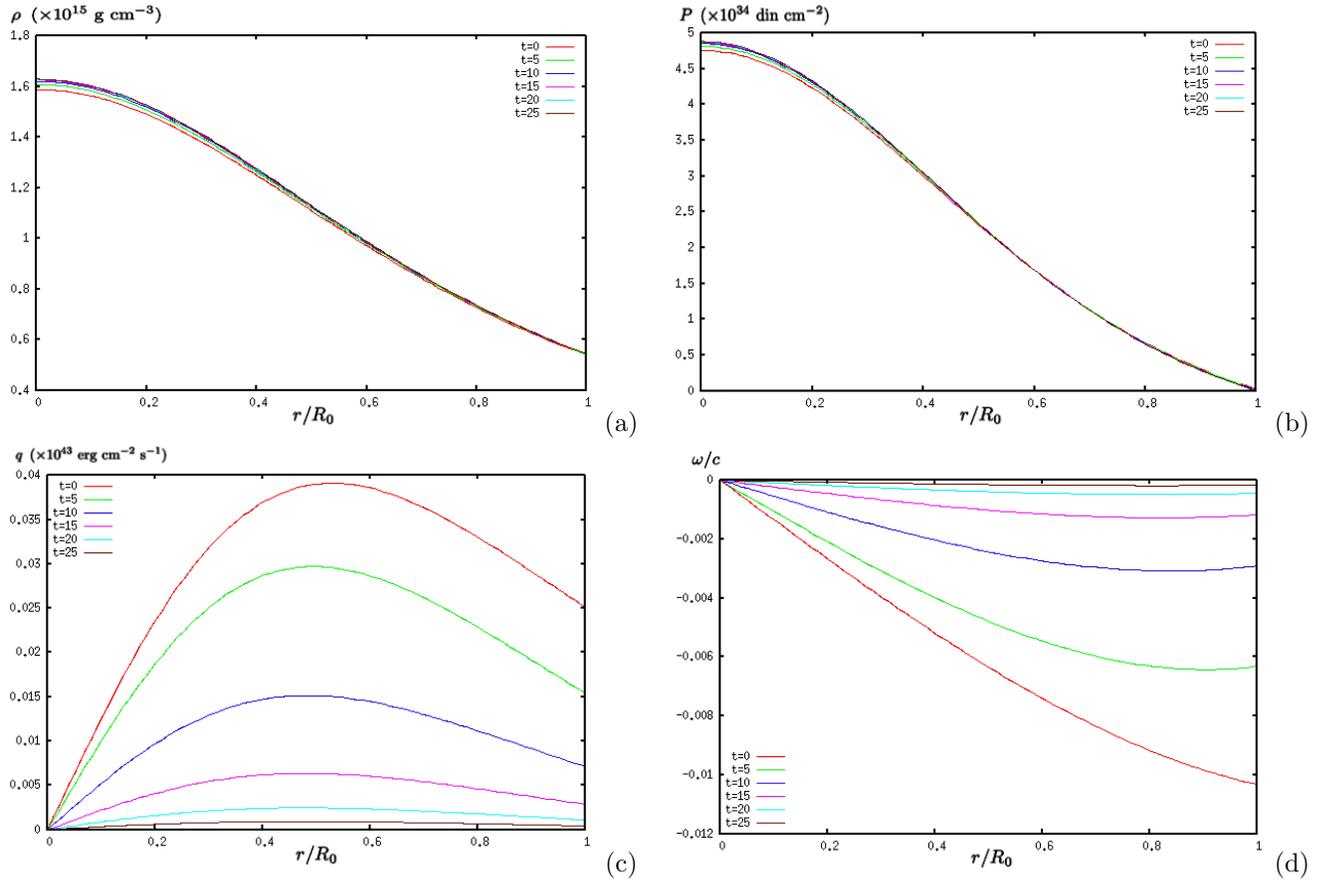


Figura 7.5: Variables físicas para el modelo (F-S) en función del radio: en (a) y (b) se aprecian los perfiles de densidad y presión radial respectivamente. En (c) el flujo de calor y en (d) la velocidad del material en la dirección radial.

El conjunto de condiciones iniciales y parámetros se muestran en la siguiente tabla

$$\begin{array}{l}
 \overline{\overline{R_0 = 10,00 \text{ Km}}} \\
 \overline{\overline{M_0 = 1,30M_\odot}} \\
 \overline{\overline{M_f = 1,29M_\odot}} \\
 \overline{\overline{\tau = -3,0}} \\
 \overline{\overline{\sigma = 5,0}}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 \overline{\overline{C_0 = 0,0360907}} \\
 \overline{\overline{\rho_{c0} = 1,59 \times 10^{15} \text{ gr/cm}^3}} \\
 \overline{\overline{\rho_{s0} = 5,38 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3}} \\
 \overline{\overline{\Omega_0 = -0,010 \text{ c}}}
 \end{array}$$

7.2. Evolución en coordenadas de radiación

Como ya se mencionó en la introducción, en un trabajo previo [11], se desarrolló un método para estudiar un posible escenario de colapso gravitacional para un fluido anisótropo y radiante pero dentro de un esquema numérico bastante particular. Este esquema numérico conocido como el método HJR [99] tiene como punto de partida escoger una solución estática y analítica conocida de las ecuaciones de Einstein y, por medio de argumentos heurísticos,

generalizarla al caso dinámico. El algoritmo HJR ha sido utilizado en una gran variedad de situaciones para el estudio de colapsos: anisótropos [100], con procesos viscosos [101], [102], [103], con propagación de ondas de choque [42], oscilaciones radiales [104], con rotación lenta [105] y diferentes situaciones de colapso radiativo, ver: [106], [107] y [108].

El uso del método permite reducir el problema de resolver las ecuaciones de campo en el problema de encontrar, numéricamente, la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden evaluadas en la superficie, y es por esta razón que HJR se suele llamar un método semi-numérico. Se parte de la presunción de que las variables dinámicas, definidas en el algoritmo, deben tener la misma dependencia radial que las variables físicas de una situación estática, el conjunto de funciones temporales que puedan aparecer deben ser encontradas vía las ecuaciones en la superficie mencionadas anteriormente.

El método HJR se desarrolla en las llamadas coordenadas de radiación o coordenadas de Bondi donde el elemento métrico, con simetría esférica, se escribe de la manera siguiente:

$$ds^2 = e^{2\beta} \left(\frac{V}{r} du^2 + 2dudr \right) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.28)$$

con $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (\mathbf{u}, r, \theta, \phi)$. La coordenada \mathbf{u} corresponde, en un espacio tiempo plano, al tiempo retardado, siendo las superficies $\mathbf{u} = \text{constante}$ conos abiertos hacia el futuro. Además $\beta = \beta(\mathbf{u}, r)$ y $V = V(\mathbf{u}, r)$.

El tensor métrico más general, con simetría esférica, para un sistema radiante es el tensor métrico de Vaidya.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(\mathbf{u})}{r} \right) du^2 + 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (7.29)$$

El elemento de línea (7.29) es un caso particular de (7.28) con $\beta = 0$ y $V = r - 2m(\mathbf{u})$.

La función $m(\mathbf{u})$ tiene la propiedad de que en el límite estático coincide con la masa de Schwarzschild. Dentro de la distribución de materia se define una generalización de $m(\mathbf{u})$, que se denotará como $m(\mathbf{u}, r)$, a través de:

$$V = e^{2\beta}(r - 2m(\mathbf{u}, r)). \quad (7.30)$$

Se quiere considerar al medio material compuesto por una mezcla de radiación y materia. Este fluido se moverá únicamente en la dirección radial con velocidad ω . Por lo tanto, el tensor de energía-impulso se pueda representar como un tensor con la siguiente forma:

$$T_{ab} = (\rho + P_{\perp})u_a u_b - P_{\perp}g_{ab} + (P - P_{\perp})v_a v_b + f_a u_b + f_b u_a, \quad (7.31)$$

donde

$$u_a = e^{\beta} \left(\sqrt{\frac{V}{r(1-\omega^2)}}, \sqrt{\frac{r}{V} \frac{1-\omega}{1+\omega}}, 0, 0 \right), \quad (7.32)$$

$$v_a = e^{\beta} \left(-\omega \sqrt{\frac{V}{r(1-\omega^2)}}, \sqrt{\frac{r}{V} \frac{1-\omega}{1+\omega}}, 0, 0 \right), \quad (7.33)$$

$$f_a = -q v_a, \quad (7.34)$$

y por supuesto, se debe cumplir que $f_a u^a = 0$ y $f_a f^a = -q^2$. Fuera de la frontera, el tensor de materia se corresponde al de un fluido nulo, es decir:

$$T_{ab} = \epsilon k_a k_b, \quad (7.35)$$

con: $k_a = \delta_a^b \sqrt{1 - 2\mathbf{m}/r}$, $k^a k_a = 0$ y ϵ la densidad de energía de radiación.

Con (7.28) y (7.31) las ecuaciones de Einstein para el interior de la configuración resultan ser las siguientes

$$\frac{1}{4\pi r(r - 2\mathbf{m})} [\mathfrak{h}\mathbf{m}' - \dot{\mathbf{m}}e^{-2\beta}] = \frac{\rho + 2\omega q + P\omega^2}{1 - \omega^2}, \quad (7.36)$$

$$\frac{1}{4\pi r^2} \mathbf{m}' = \frac{\rho - q(1 - \omega) - P\omega}{1 + \omega}, \quad (7.37)$$

$$\frac{\mathfrak{h}}{2\pi r} \beta' = \frac{1 - \omega}{1 + \omega} [\rho - 2q + P], \quad (7.38)$$

$$-\frac{\dot{\beta}'e^{-2\beta}}{4\pi} + \frac{\mathfrak{h}}{8\pi} \left(2\beta'' + 4(\beta')^2 - \frac{\beta'}{r} \right) + \frac{3\beta'(1 - 2\mathbf{m}') - \mathbf{m}''}{8\pi r} = P_{\perp}, \quad (7.39)$$

donde

$$\mathfrak{h} \equiv 1 - \frac{2\mathbf{m}}{r}. \quad (7.40)$$

Para seguir con el método expuesto por Herrera y colaboradores [99] es necesario definir dos funciones auxiliares:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - q(1 - \omega) - P\omega}{1 + \omega}, \quad (7.41)$$

$$\tilde{P} = \frac{-\rho\omega - q(1 - \omega) + P}{1 + \omega}, \quad (7.42)$$

de manera tal que las ecuaciones (7.37) y (7.38) puedan ser integradas formalmente:

$$\mathbf{m} = \int_0^r 4\pi r^2 \tilde{\rho} dr, \quad (7.43)$$

$$\beta = \int_{r_s(\mathbf{u})}^r \frac{2\pi r}{\mathfrak{h}} (\tilde{\rho} + \tilde{P}) dr. \quad (7.44)$$

La función $r_s(\mathbf{u})$ representa el borde de la distribución de materia y su derivada resulta ser [99]

$$\left[\frac{dr}{du} \right]_{r_s} = \dot{r}_s = \left(1 - \frac{2\mathbf{m}(\mathbf{u}, r_s)}{r_s} \right) \frac{\omega_{r_s}}{1 - \omega_{r_s}}. \quad (7.45)$$

Por las condiciones de acoplamiento, la función $\beta(\mathbf{u}, r)$ evaluada en la superficie es necesariamente igual a cero, $\beta(\mathbf{u}, r_s) = 0$. A partir de un desarrollo en serie de $\beta(\mathbf{u}, r)$ en torno a $r = r_s(\mathbf{u})$ [99] y del hecho de que en la superficie $P_{r_s} = q_{r_s}$, se obtiene la siguiente relación

$$\tilde{P}_{r_s} = -\omega_{r_s} \tilde{\rho}_{r_s}. \quad (7.46)$$

La parte central del método HJR consiste en escribir un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, evaluadas en la superficie. Las soluciones de este conjunto de ecuaciones diferenciales, que son obviamente funciones de \mathbf{u} , pueden ser relacionadas directamente con las funciones $\tilde{\rho}(\mathbf{u}, r)$ y $\tilde{P}(\mathbf{u}, r)$. Pero queda por determinar la dependencia en r de las variables efectivas $\tilde{\rho}$ y \tilde{P} , esto se logra haciendo coincidir estas funciones con soluciones conocidas de las ecuaciones de Einstein para el caso estático, pero siempre considerando la condición (7.46).

Una vez que se determinan por completo las funciones $\tilde{\rho}(\mathbf{u}, r)$ y $\tilde{P}(\mathbf{u}, r)$, entonces $\mathbf{m}(\mathbf{u}, r)$ y $\beta(\mathbf{u}, r)$ se pueden obtener gracias a las ecuaciones (7.44) y (7.44). Conocidas las funciones métricas, el lado izquierdo de las ecuaciones de campo (7.36) - (7.39) queda completamente determinado. Como se tienen cuatro ecuaciones y cinco incógnitas es necesario cerrar el sistema suministrando algún tipo de información adicional. La manera de cerrar el sistema dependerá del modelo tomado como “semilla” para la configuración estática, pero básicamente consiste en suministrar una expresión para el término que involucra la anisotropía del sistema, es decir, $P_{\perp} - P$.

Siguiendo con [99], las ecuaciones en la superficie se determinan como se muestra a continuación, pero primero se definen las siguientes funciones adimensionales

$$\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{m}_{r_s}(0)}, \quad A(\mathbf{u}) \equiv \frac{r_s(\mathbf{u})}{\mathbf{m}_{r_s}(0)}, \quad M(\mathbf{u}) \equiv \frac{\mathbf{m}_{r_s}(\mathbf{u})}{\mathbf{m}_{r_s}(0)}, \quad F \equiv 1 - \frac{2M}{A}, \quad \Omega \equiv \frac{1}{1 - \omega_{r_s}}, \quad (7.47)$$

donde $\mathbf{m}_{r_s}(0)$ es la masa inicial del sistema. Sin pérdida de generalidad se puede tomar que $\mathbf{m}_{r_s}(0) = 1$.

La primera ecuación en la superficie es la ecuación (7.45), escrita en función de las nuevas variables resulta ser

$$\dot{A} = F(\Omega - 1). \quad (7.48)$$

La segunda ecuación en la superficie se obtiene partiendo de la definición de la luminosidad evaluada en la superficie de la estrella [99]

$$L = -\dot{M} = 4\pi A^2 q_{r_s} (2\Omega - 1) F. \quad (7.49)$$

Combinando la derivada de F , de (7.47), con (7.48) y (7.49) se obtiene la segunda ecuación diferencial

$$\dot{F} = \frac{2L + F(1 - F)(\Omega - 1)}{A}. \quad (7.50)$$

Estas dos ecuaciones son independientes del modelo a considerar.

La tercera ecuación, que sí depende del modelo, se obtiene de la conservación de la cantidad de movimiento radial en la superficie $[T^{\mu}_{1;\mu}]_{r_s} = 0$. Por supuesto, también se puede obtener combinando (7.39) con (7.43) y (7.44). El resultado, luego de un largo y tedioso proceso de cálculo, en función de las variables adimensionales es el siguiente

$$\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{\tilde{\rho}}_{r_s}}{\tilde{\rho}_{r_s}} + F\Omega^2 \frac{\mathcal{R}_{r_s}}{\tilde{\rho}_{r_s}} - \frac{2F\Omega}{A} \frac{P_{r_s}}{\tilde{\rho}_{r_s}} = \mathcal{G}, \quad (7.51)$$

con

$$\mathcal{R}_{r_s} = \left[\tilde{P}' + \left(\frac{\tilde{\rho} + \tilde{P}}{\mathfrak{h}} \right) \left(4\pi r \tilde{P} + \frac{\mathfrak{m}}{r^2} \right) - \frac{2}{r} (P_{\perp} - P) \right]_{r_s}, \quad (7.52)$$

$$\mathcal{G} = (1 - \Omega) \left[\frac{4\pi A(3\Omega - 1)}{\Omega} \tilde{\rho}_{r_s} - \frac{3 + F}{2A} + F\Omega \frac{\tilde{\rho}'_{r_s}}{\tilde{\rho}_{r_s}} + \frac{2F\Omega}{A\tilde{\rho}_{r_s}} (P_{\perp} - P)_{r_s} \right]. \quad (7.53)$$

Las ecuaciones (7.48) - (7.51) conforman el conjunto de ecuaciones diferenciales evaluadas en la superficie, las cuales se pueden integrar numéricamente si se suministra la forma de la dependencia radial de las variables efectivas $\tilde{\rho}$ y \tilde{P} . De las cuatro funciones que aparecen en (7.48) - (7.51), es decir, $A(\mathbf{u})$, $F(\mathbf{u})$, $\Omega(\mathbf{u})$ y $L(\mathbf{u})$, resulta necesario suministrar una de ellas para cerrar el sistema y por supuesto un conjunto de condiciones iniciales. Es conveniente suministrar la luminosidad $L(\mathbf{u})$ ya que esta función se puede relacionar de manera sencilla con datos observacionales.

7.2.1. El formalismo HJR y la ecuación de estado no local

Podemos ver ahora cómo es la adaptación del algoritmo anterior si se introduce una EENL. El elemento métrico (7.28) se puede reescribir de la siguiente manera

$$ds^2 = e^{4\beta} \mathfrak{h} du^2 + 2e^{2\beta} dudr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.54)$$

En estas coordenadas la condición (3.36) resulta ser la siguiente

$$\mathfrak{h} \equiv 1 - \frac{2\mathfrak{m}}{r} = \mathcal{C}(\mathbf{u}) e^{-2\beta}, \quad \text{con } 0 < \mathcal{C}(\mathbf{u}) < 1. \quad (7.55)$$

Derivando (7.55) con respecto a r y combinando (7.55), (7.43) y (7.44) se obtiene

$$\mathfrak{m} = 2\pi r^3 (\tilde{\rho} - \tilde{P}). \quad (7.56)$$

Es fácil ver que si se deriva (7.56) con respecto a r y se compara con (7.43) se obtiene nuestra conocida relación, pero para las variables efectivas,

$$\tilde{\rho} - 3\tilde{P} + r (\tilde{\rho}' - \tilde{P}') = 0. \quad (7.57)$$

La ecuación (7.55) en términos de las variables de la superficie es

$$\mathfrak{h}_{r_s} = 1 - \frac{2M}{A} = \mathcal{C}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}), \quad (7.58)$$

es decir, en la superficie la función $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ coincide con el potencial gravitacional. Evaluando (7.56) sobre el borde da la distribución y utilizando (7.46) resulta que

$$\mathfrak{m}_{r_s} = 2\pi r_s^3 (1 + \omega_{r_s}) \tilde{\rho}_{r_s}, \quad (7.59)$$

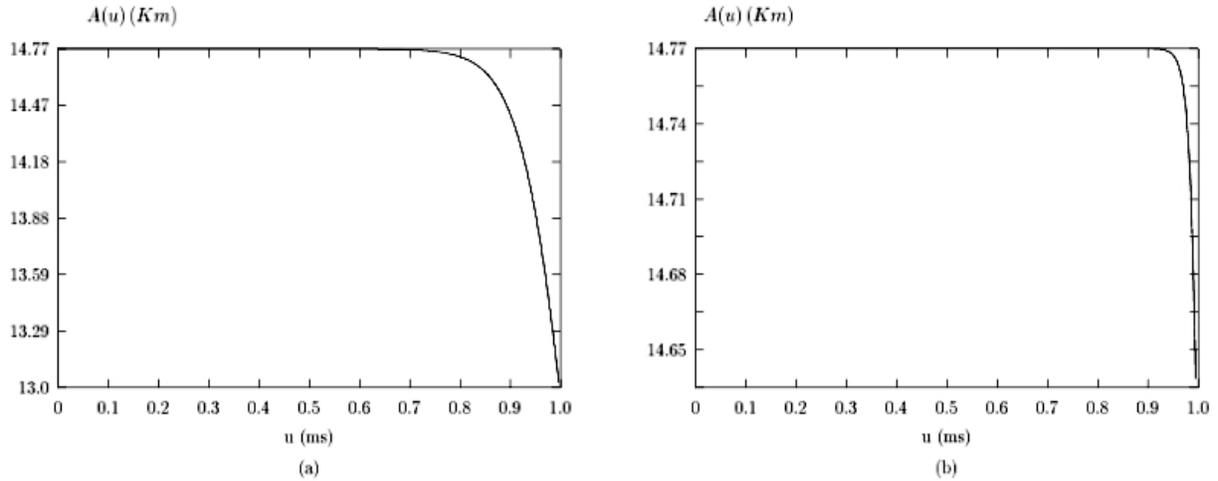


Figura 7.6: Evolución de radio adimensional $A(u)$ para el caso con $\mathcal{C}(u)$ variable, figura (a), y para el caso con el potencial gravitacional en la superficie constante, figura (b).

que en función de las variables adimensionales es

$$1 - \mathcal{C} = \frac{4\pi A^2}{\Omega} (2\Omega - 1) \tilde{\rho}_{r_s}. \quad (7.60)$$

Por lo tanto, la “velocidad” de la superficie se puede obtener de esta última expresión

$$\Omega(u) = \frac{4\pi A^2 \tilde{\rho}_{r_s}}{8\pi A^2 \tilde{\rho}_{r_s} + \mathcal{C} - 1}. \quad (7.61)$$

7.2.2. Un escenario posible de colapso con una EENL

Como ya se mencionó, el método HJR necesita como punto de partida el hecho de tomar una solución estática conocida de las ecuaciones de Einstein. Esta solución “semilla” debe adaptarse de manera tal que involucre funciones de \mathbf{u} .

Vamos a considerar nuevamente la solución estática y anisótropa que se tomó como punto de partida para el Modelo 1: el modelo estático de Gokhroo y Mehra, donde la densidad es:

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 - K \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (7.62)$$

Un estudio detallado del escenario dinámico utilizando la solución completa, e inspirada en el modelo original de Gokhroo y Mehra, puede ser revisado en [67]. Aquí tomaremos un camino alternativo ya que en nuestro caso la presión efectiva es obtenida vía la ecuación (7.57). Por lo tanto, al igual que como se hizo para el Modelo 1 anteriormente desarrollado, para aplicar el método HJR se recurre al *ansatz* de suponer que

$$\tilde{\rho}(\mathbf{u}, r) = \tilde{\rho}_c(\mathbf{u}) \left(1 - K(\mathbf{u}) \frac{r^2}{A(\mathbf{u})^2} \right), \quad 0 \leq K(\mathbf{u}) \leq 1, \quad (7.63)$$

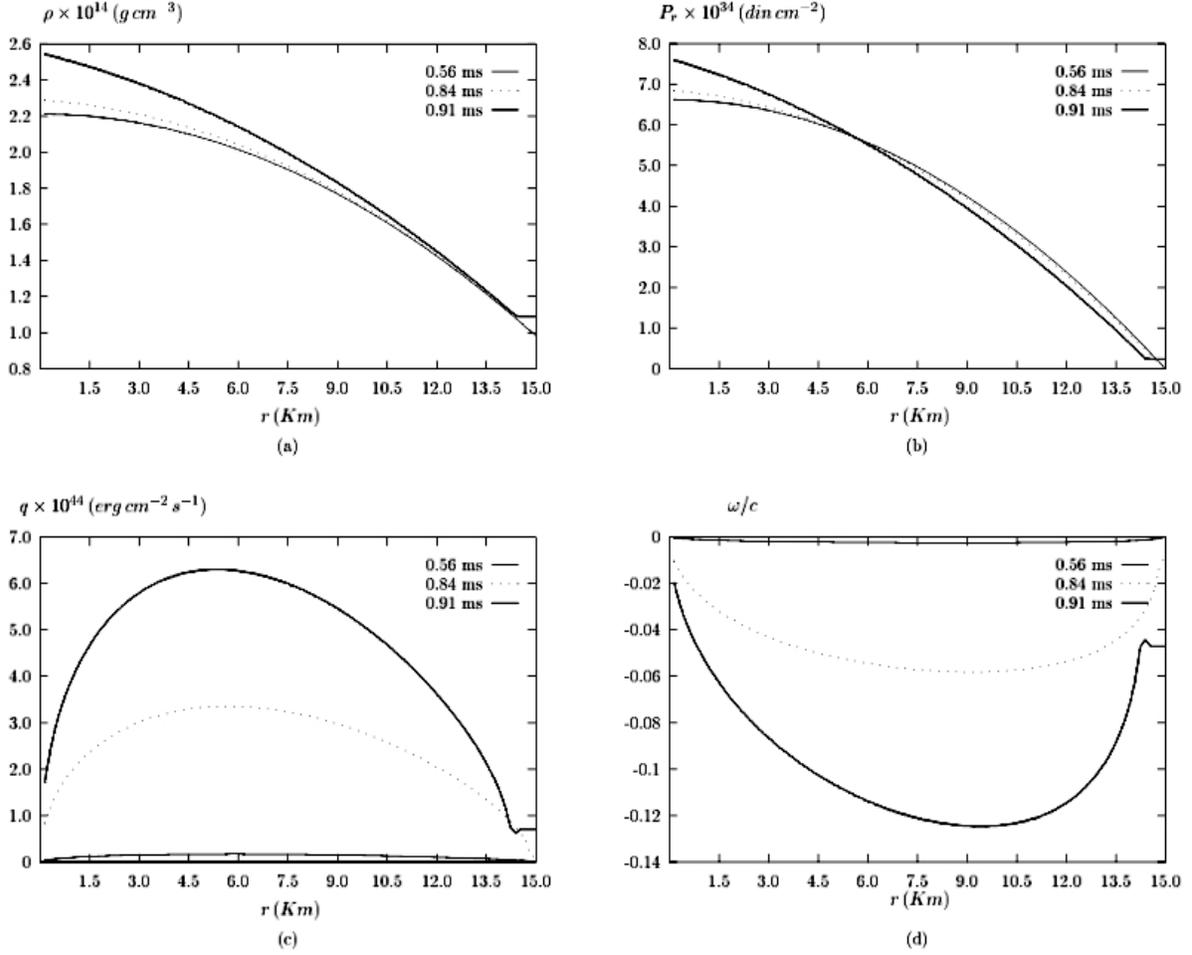


Figura 7.7: Variables físicas ρ , P_r , q , y ω/c para el modelo Gokhroo-Mehra con una **EENL**.

donde la densidad de energía central $\tilde{\rho}_c(\mathbf{u})$ debe coincidir con ρ_c en el límite estático.

A partir de las condiciones de acoplamiento es posible relacionar las funciones $K(\mathbf{u})$ y $\tilde{\rho}(\mathbf{u})$ con las funciones $A(\mathbf{u})$, $F(\mathbf{u})$, $\Omega(\mathbf{u})$ y $L(\mathbf{u})$ [11]. Estas funciones resultan ser

$$\tilde{\rho}(\mathbf{u}) = \frac{15(1 - \mathcal{C})}{8\pi A^2(5 - 3K)}, \quad (7.64)$$

$$K(\mathbf{u}) = \frac{54\Omega - 3}{38\Omega - 5}. \quad (7.65)$$

Con esta información, las variables efectivas pueden ser escritas como

$$\tilde{\rho}(\mathbf{u}, r) = \frac{r^2(1 - \mathcal{C})}{16\pi A^4(2\Omega - 1)} \left[5(3 - 4\Omega) + \frac{3A^2(8\Omega - 5)}{r^2} \right], \quad (7.66)$$

$$\tilde{P}(\mathbf{u}, r) = \frac{r^2(1 - \mathcal{C})}{16\pi A^4(2\Omega - 1)} \left[3(3 - 4\Omega) + \frac{A^2(8\Omega - 5)}{r^2} \right]. \quad (7.67)$$

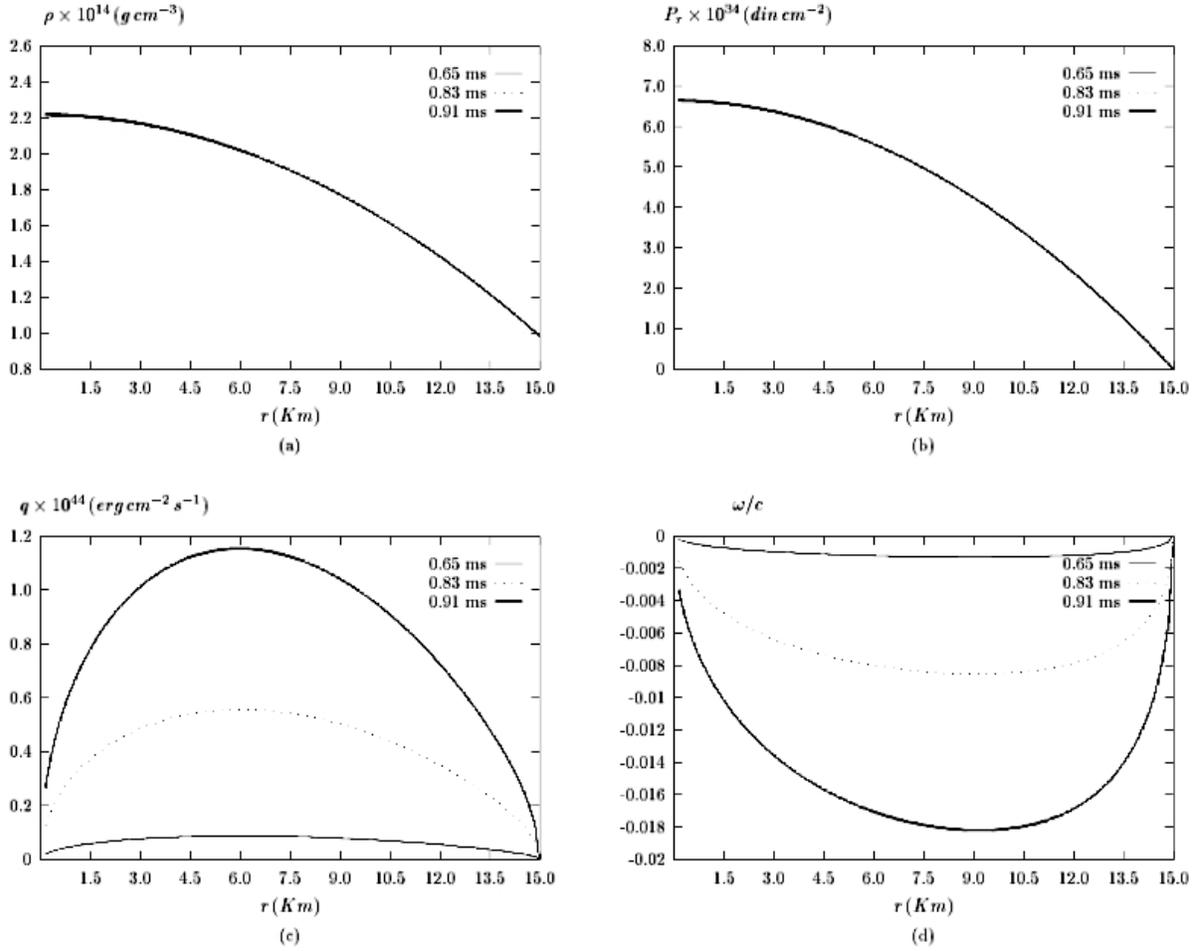


Figura 7.8: Variables físicas ρ , P_r , q , y ω/c para el caso del modelo Gokhroo-Mehra con una **EENL** y el potencial en la superficie constante.

Y en virtud de las ecuaciones (7.43) y (7.44) las funciones métricas quedan completamente determinadas

$$\mathbf{m}(\mathbf{u}, r) = \frac{r^3(1 - \mathcal{C})}{4A^4(2\Omega - 1)} [r^2(3 - 4\Omega) + A^2(8\Omega - 5)] , \quad (7.68)$$

$$\beta(\mathbf{u}, r) = \frac{1}{2} \ln [\mathcal{C}] - \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2\mathbf{m}}{r} \right] . \quad (7.69)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales en la superficie puede ser ahora obtenido, y el resultado se muestra a continuación

$$\dot{A} = \mathcal{C}(\Omega - 1) , \quad (7.70)$$

$$\dot{\mathcal{C}} = \frac{1}{A} [2L + \mathcal{C}(1 - \mathcal{C})(\Omega - 1)] , \quad (7.71)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{2\Omega - 1}{A(1 - \mathcal{C})} \left[L - \dot{A}(1 - \mathcal{C}) - \frac{A\dot{\mathcal{C}}}{2\mathcal{C}} \right] - \frac{\Omega - 1}{2A} [1 - 11\mathcal{C} - 4\mathcal{C}(8\Omega - 9)\Omega] . \quad (7.72)$$

Para comenzar la integración numérica de este conjunto de ecuaciones diferenciales se suministrará un perfil de luminosidad $L(\mathbf{u})$ que puede ser un pulso de Gauss centrado en el tiempo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p$:

$$L(\mathbf{u}) = -\dot{M} = \frac{\Delta M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_p}{\sigma} \right)^2 \right\} , \quad (7.73)$$

donde σ es el ancho del pulso y ΔM es la masa radiada durante el proceso de colapso. Para los modelos presentados aquí:

$$\Delta M = 10^{-6} M(0), \quad \sigma = 5, \quad \mathbf{u}_p = 100 .$$

Se seguirá la evolución de las variables hidrodinámicas para dos casos:

Caso 1: Se considerará el conjunto completo de ecuaciones (7.70) - (7.72).

Caso 2: El potencial en la superficie se tomará constante, es decir, $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = C$. En este caso es importante señalar que la luminosidad surge directamente de la ecuación (7.71) y, por lo tanto, no es necesario suministrar el pulso (7.73). Lo que sí es necesario es perturbar el sistema para sacarlo del equilibrio, esto se hace modificando muy levemente ($\approx 10^{-10}$) el valor de la velocidad inicial que es: $\Omega(0) = 1 \Rightarrow \omega_{r_s} = 0$.

El comportamiento de las variables físicas se presenta en las figuras 7.6, 7.7 y 7.8 y el conjunto de condiciones iniciales y parámetros utilizados se muestra en la siguiente tabla:

| | |
|----------------------------|--|
| $M(0) = 1,0M_{\odot}$ | $\rho_c(0) = 2,2 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$ |
| $A(0) = 10$ | $\rho_{r_s}(0) = 9,8 \times 10^{13} \text{ gr/cm}^3$ |
| $\Omega(0) = 1 - 10^{-10}$ | $z_{r_s}(0) = 0,118$ |
| $K(0) = 5/9$ | $r_s(0) = 14,77 \text{ Km}$ |
| $\mathcal{C}(0) = 4/5$ | |

7.3. Colineaciones conformes

Existe un gran interés en el estudio de simetrías en Relatividad General debido a la necesidad de simplificar las ecuaciones de Einstein, sobre todo para facilitar la tarea de encontrar soluciones exactas. Este interés se ve reflejado en una gran cantidad de trabajos dedicados al tema, ver: [109]-[119], y las diferentes referencias incluidas. Los bien conocidos vínculos entre los vectores de Killing y las constantes de movimiento [120] han alentado la investigación sobre las relaciones más generales que puedan existir entre las colineaciones y leyes de conservación [117],[121].

Las cantidades de mayor relevancia en el estudio sobre la estructura del espacio-tiempo son principalmente los tensores de Curvatura y de Ricci. Un estudio básico sobre las colineaciones de Curvatura y de Ricci se puede ver en Katzin y colaboradores [122]. Clasificaciones completas de estas colineaciones pueden verse en [112]-[115] y [117].

Otro tipo de relación entre simetrías y soluciones exactas fue encontrado por Lindblom [123], quien muestra que la únicas soluciones estáticas y no rotantes de las ecuaciones de Einstein deben tener simetría esférica. Como condición para encontrar este resultado utiliza el hecho de que las soluciones deben ser asintóticamente planas, a través de la introducción de una cantidad denominada factor conforme.

Las situaciones dinámicas, que contienen al estático como un caso particular, son considerablemente más difíciles de tratar, se pueden consultar algunos trabajos al respecto revisando a Contreras [110] y Apostolopoulos [124].

En lo que exponemos a continuación, queremos estudiar un tipo particular de colineación: la Colineación Conforme, es decir, una transformación del tipo:

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi_{a;b} + \xi_{b;a} = \psi(x^\mu) g_{ab}, \quad (7.74)$$

en el caso dinámico, con simetría esférica e incorporando una **EENL**. Para tal fin, suponemos que el campo vectorial ξ^μ tiene la siguiente forma:

$$\xi^\mu = s(t, r)\delta_0^\mu + l(t, r)\delta_1^\mu, \quad (7.75)$$

Consideremos una vez más el siguiente elemento métrico:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (7.76)$$

donde $\nu = \nu(t, r)$ y $\lambda = \lambda(t, r)$.

Las ecuaciones de colineación serán

$$\dot{\nu}s + \dot{s} + l\nu' - \frac{l}{r} = 0, \quad (7.77)$$

$$-e^{2\lambda}\dot{l} + e^{2\nu}s' = 0, \quad (7.78)$$

$$\lambda'l + l' + s\dot{\lambda} - \frac{l}{r} = 0. \quad (7.79)$$

Si consideramos el caso no local, donde el elemento métrico es: (ver ecuación (3.37))

$$ds^2 = e^{2\lambda}e^{2\kappa} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (7.80)$$

aquí $\kappa = \kappa(t)$ y $\lambda = \lambda(t, r)$, las ecuaciones de colineación (7.77)-(7.79) quedan de la siguiente forma:

$$s\dot{\lambda} + s\dot{\kappa} + \dot{s} + l\lambda' - \frac{l}{r} = 0, \quad (7.81)$$

$$-\dot{l} + e^{2\kappa}s' = 0, \quad (7.82)$$

$$\lambda'l + l' + s\dot{\lambda} - \frac{l}{r} = 0. \quad (7.83)$$

Ahora bien, la resta de (7.81) y (7.83) da como resultado:

$$l' - \dot{s} - s\dot{\kappa} = 0. \quad (7.84)$$

Al derivar (7.82) con respecto a t , la ecuación (7.84) con respecto a r y resolver para l resulta:

$$-\ddot{l} + e^{2\kappa} l'' + e^{2\kappa} s' \dot{\kappa} = 0. \quad (7.85)$$

Una ecuación similar a (7.85) para la función $s = s(t, r)$ también puede ser obtenida.

Anteriormente vimos que la función κ se encuentra relacionada, vía las condiciones de acoplamiento, con el potencial gravitacional en la superficie de la distribución de materia, esto es:

$$e^\kappa = 1 - \frac{2M(t)}{r_s(t)}, \quad (7.86)$$

Si consideramos el caso en que el potencial en la superficie es constante, es decir,

$$e^\kappa = 1 - \frac{2M}{r_s} = C, \quad (7.87)$$

entonces (7.85) queda de la siguiente forma:

$$-\ddot{l} + C^2 l'' = 0. \quad (7.88)$$

Las soluciones más generales de la ecuación (7.88), tanto para l y s , son las siguientes

$$l = f(u) + g(v), \quad (7.89)$$

$$s = m(u) + n(v), \quad (7.90)$$

donde $f(u)$, $g(v)$, $m(u)$ y $n(v)$ son funciones arbitrarias y

$$u = Ct + r, \quad (7.91)$$

$$v = Ct - r, \quad (7.92)$$

las cuales al sustituirlas en (7.82) y (7.84) dan como resultado

$$[\partial_u m - \partial_v n] C - \partial_u f - \partial_v g = 0, \quad (7.93)$$

$$[\partial_u m + \partial_v n] C - \partial_u f + \partial_v g = 0. \quad (7.94)$$

Combinando (7.93) con (7.94) se obtiene el siguiente par de ecuaciones

$$\partial_u m = \frac{1}{C} \partial_u f, \quad (7.95)$$

$$\partial_v n = -\frac{1}{C} \partial_v g, \quad (7.96)$$

lo cual permite escribir (7.90) de la forma

$$s = \frac{1}{C} [f(u) - g(v)]. \quad (7.97)$$

Por otro lado, al sustituir (7.89) y (7.97) en (7.83) se obtiene

$$2 \left[\partial_u \lambda - \frac{1}{u-v} \right] f + \partial_u f - 2 \left[\partial_v \lambda + \frac{1}{u-v} \right] g - \partial_v g = 0. \quad (7.98)$$

A través de las siguientes definiciones

$$\partial_u \alpha(u) \equiv \partial_u \lambda - \frac{1}{u-v}, \quad (7.99)$$

$$\partial_v \beta(v) \equiv \partial_v \lambda + \frac{1}{u-v}, \quad (7.100)$$

es posible separar variables para los dos coeficientes entre corchetes que aparecen en (7.98). De esta manera es posible integrar (7.99) y (7.100) para obtener la función $\lambda(u, v)$

$$\lambda(u, v) = \ln(u-v) + \alpha(u) + \beta(v) + c_1, \quad (7.101)$$

donde c_1 es una constante.

Ahora (7.98) se simplifica considerablemente y toma la siguiente forma

$$2(\partial_u \alpha) f + \partial_u f = 2(\partial_v \beta) g + \partial_v g = c_2, \quad (7.102)$$

donde c_2 es una constante. Si se integran las ecuaciones (7.102) se obtiene

$$f(u) = e^{-2\alpha} \left[c_2 \int e^{2\alpha} du + c_3 \right], \quad (7.103)$$

$$g(v) = e^{-2\beta} \left[c_2 \int e^{2\beta} dv + c_4 \right], \quad (7.104)$$

donde c_3 y c_4 son constantes de integración.

Las expresiones (7.103) y (7.104) permiten calcular el campo vectorial ξ^α a partir de las funciones que definen la métrica, a través de (7.89) y (7.97), es decir,

$$\xi^\mu = \frac{1}{C} [f(u) - g(v)] \delta_0^\mu + [f(u) + g(v)] \delta_1^\mu. \quad (7.105)$$

Otra manera de expresar (7.101), es por medio de las coordenadas t y r

$$\lambda(t, r) = \ln(2r) + \alpha(Ct + r) + \beta(Ct - r) + c_1. \quad (7.106)$$

El elemento de línea queda ahora como

$$ds^2 = r^2 [4e^{2(\alpha+\beta)} (C^2 dt^2 - dr^2) - (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (7.107)$$

El factor conforme resulta de la siguiente forma

$$\psi(t, r) = \frac{2l}{r} = \frac{2}{r} [f(Ct + r) + g(Ct - r)]. \quad (7.108)$$

7.3.1. Condiciones de energía

A partir de la métrica (7.107) y de considerar al medio material descrito por

$$T_{ab} = (\rho + P_{\perp})u_a u_b - P_{\perp}g_{ab} + (P - P_{\perp})v_a v_b + f_a u_b + f_b u_a, \quad (7.109)$$

donde

$$u^a = \left(\frac{1}{2re^{(\alpha+\beta)C}}, 0, 0, 0 \right), \quad v^a = \left(0, \frac{1}{2re^{(\alpha+\beta)}}, 0, 0 \right), \quad f^a = qv^a, \quad (7.110)$$

de las ecuaciones de Einstein se obtiene que la densidad de energía, la presión radial, la presión tangencial y la densidad del flujo de energía vienen dadas por

$$\rho = \frac{1}{32\pi r^4} [4r^2 + \mathcal{H} \{1 + 2r(\alpha' - \beta')\}], \quad (7.111)$$

$$P = -\frac{1}{32\pi r^4} [4r^2 - \mathcal{H} \{3 + 2r(\alpha' - \beta')\}], \quad (7.112)$$

$$P_{\perp} = -\frac{\mathcal{H}}{32\pi r^4}, \quad (7.113)$$

$$q = -\frac{\mathcal{H}}{16\pi r^3} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}), \quad (7.114)$$

con

$$\mathcal{H} \equiv e^{-2(\alpha+\beta)} > 0. \quad (7.115)$$

De las ecuaciones (7.111), (7.112) y (7.113) resulta que:

$$\rho - P - 2P_{\perp} = \frac{1}{4\pi r^2} > 0, \quad (7.116)$$

y de (3.46)

$$m(t, r) = \frac{1}{8r} [4r^2 - \mathcal{H}]. \quad (7.117)$$

Por lo tanto, inevitablemente

$$P_{\perp} < 0, \quad (7.118)$$

Para que la densidad de energía y la presión radial sean positivas implica que se deben cumplir las siguientes desigualdades

$$\rho \geq \Rightarrow \alpha' - \beta' \geq -\frac{2r}{\mathcal{H}} - \frac{1}{2r}, \quad (7.119)$$

$$P \geq \Rightarrow \alpha' - \beta' \geq \frac{2r}{\mathcal{H}} - \frac{3}{2r}. \quad (7.120)$$

Con (7.119) y (7.120) resulta entonces que

$$\rho - P > 0 \Leftrightarrow 0 < \mathcal{H} \leq 4r^2, \quad (7.121)$$

lo que también garantiza que $m \geq 0$.

La condición para Δ , (2.106), se cumple si

$$\alpha' - \beta' \geq - \left(\dot{\alpha} + \dot{\beta} \right) - \frac{1}{r}. \quad (7.122)$$

Con (7.116), (7.121) y (7.122) las Condiciones de Energía Débil y Dominante se satisfacen automáticamente.

Finalmente, para la condición de Energía Fuerte se tiene que

$$\Delta \geq \frac{\mathcal{H}}{16\pi r^4} \Rightarrow 4\pi r^2 \Delta \geq 1. \quad (7.123)$$

Con (7.121) las inecuaciones (7.119), (7.120) y (7.122) se resumen en las siguientes dos

$$\alpha' - \beta' \geq -\frac{1}{r}, \quad (7.124)$$

$$\dot{\alpha} + \dot{\beta} \geq 0. \quad (7.125)$$

Por lo tanto, para que las funciones de la métrica (7.107) tengan sentido físico se deben satisfacer las desigualdades (7.124) y (7.125). De la ecuación (7.106), se tiene que

$$\lambda' = \frac{1}{r} + \alpha' - \beta', \quad (7.126)$$

por lo tanto:

$$\lambda' \geq 0. \quad (7.127)$$

En resumen, este es el conjunto de restricciones sobre las funciones de la métrica α y β para que el espacio-tiempo admita un grupo de simetrías conformes considerando que el fluido, con un potencial gravitacional constante en la superficie, esté descrito por una ecuación de estado no local.

Como un comentario final, se puede notar que si el material es del tipo fluido perfecto, $P = P_{\perp}$, entonces de las ecuaciones (7.112) y (7.113) resulta que

$$\alpha' - \beta' = \frac{2r}{\mathcal{H}} - \frac{2}{r} \Rightarrow P < 0. \quad (7.128)$$

7.3.2. Acoplamiento y evolución de la superficie

Luego de estudiar las condiciones de energía se quiere investigar ahora cuáles son las consecuencias que surgen sobre las condiciones de acoplamiento para la familia de métricas (7.107):

$$ds^2 = r^2 [4e^{2(\alpha+\beta)} (C^2 dt^2 - dr^2) - d\Omega^2].$$

Según las condiciones de acoplamiento (2.82) - (2.83), para el elemento métrico anterior se obtiene

$$e^{2(\alpha_s+\beta_s)} = \frac{1}{4Cr_s^2}. \quad (7.129)$$

De la igualdad de la segunda forma fundamental (2.95) y a partir de las ecuaciones (7.112) y (7.114), evaluadas en la superficie, resulta

$$r_s(t) = \frac{1 - 3C}{2C \left[\alpha'_s - \beta'_s + \dot{\alpha}_s + \dot{\beta}_s \right]}. \quad (7.130)$$

Al igualar las expresiones (7.129) y (7.130) se obtiene

$$\alpha'_s - \beta'_s + \dot{\alpha}_s + \dot{\beta}_s = K e^{(\alpha_s + \beta_s)}, \quad (7.131)$$

donde K es una constante definida de la manera siguiente:

$$K \equiv \frac{1 - 3C}{\sqrt{C}}. \quad (7.132)$$

La ecuación (7.131) puede escribirse en función de las variables u y v :

$$\left[\frac{\partial \alpha_s}{\partial u} + \frac{\partial \beta_s}{\partial v} \right] [1 + C] = K e^{(\alpha_s(u) + \beta_s(v))}. \quad (7.133)$$

La ecuación (7.133) puede resolverse para la función α si consideramos a β constante ($\beta = C_1$), resultando

$$\alpha_s(u) = -C_1 - \ln \left[\frac{K(u + C_2)}{-1 - C} \right]. \quad (7.134)$$

De (7.129) y substituyendo las funciones α y β , se obtiene que el radio de la distribución viene dado por las siguientes dos soluciones

$$r_s^+(t) = \frac{(3C - 1)(Ct + C_2)}{1 - C + 2C^2}, \quad (7.135)$$

$$r_s^-(t) = \frac{(3C - 1)(Ct + C_2)}{1 - 5C - 2C^2}, \quad (7.136)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

Consideremos las soluciones anteriores separadamente. Para r_s^+ se tiene que:

$$1 - C + 2C^2 > 0 \quad \forall C \in (0, 1), \quad (7.137)$$

resultando que la configuración se expande si $C \in (0, \frac{1}{3})$ y colapsa si $C \in (\frac{1}{3}, 1)$. Adicionalmente, ya que $r_s^\pm > 0 \quad \forall t \in (0, \infty)$, existirán varios valores para las posibles configuraciones iniciales (M_0 y r_{s0}^\pm) que deberán ser excluidos. Para el caso de r_s^+ los valores permitidos para C son:

$$C \in \left(0, \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \text{Expansión} \quad (7.138)$$

$$C \in \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \Rightarrow \text{Contracción} \quad (7.139)$$

Para el segundo caso, r_s^- , los valores permitidos se pueden expresar como

$$C \in \left(0, \frac{1}{4}(\sqrt{33} - 5)\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow \text{Expansión} \quad (7.140)$$

$$C \in \left(\frac{1}{4}(\sqrt{33} - 5), \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \text{Contracción} \quad (7.141)$$

Si denominamos C_2^+ y C_2^- a la constante C_2 para cada uno de los casos r_s^+ y r_s^- , es fácil verificar que para el tiempo inicial $t = 0$ resultan ser:

$$C_2^+ = \frac{r_{s0}^+(1 - C + 2C^2)}{(1 - 3C)}, \quad (7.142)$$

$$C_2^- = \frac{r_{s0}^-(1 - 5C - 2C^2)}{(1 - 3C)}, \quad (7.143)$$

donde r_{s0}^+ y r_{s0}^- son los valores iniciales de $r_s^+(t)$ y $r_s^-(t)$, respectivamente.

Es claro que para un conjunto de valores iniciales de la masa M_0 y del radio r_{s0}^\pm , es decir, para el potencial gravitacional en la superficie constante $C = 1 - 2M_0/r_{s0}^\pm$ la evolución del borde de la configuración material quedará completamente determinada.

7.4. Discusión

La construcción de modelos para sistemas auto-gravitantes en proceso de colapso puede llegar a convertirse en un problema de difícil tratamiento, debido a la complejidad que resulta cuando se quieren integrar las ecuaciones de Einstein. Por lo general, la evolución de objetos compactos se puede seguir a través de la elaboración de modelos matemáticos numéricos que utilizan técnicas computacionales complejas. Sin embargo, a partir de considerar algunos argumentos heurísticos razonables, que permitan simplificar las ecuaciones de movimiento, es posible resolver analíticamente las ecuaciones de Einstein y generar modelos de colapso gravitacional.

Una descripción realista del colapso de una estrella de neutrones debe quedar fundamentada por una ecuación de estado, que contenga toda la información posible de los mecanismos que ocurren dentro de la materia nuclear: debe contemplar los diferentes procesos que involucren la emisión de radiación de energía presente en el interior de la materia, así como también la opacidad del medio a la radiación electromagnética a través de alguna ecuación de transporte. La posible aparición de materia extraña, los cambios de fase en la materia debido a las variaciones en la población de sus partículas constituyentes y los esfuerzos tangenciales del fluido, hacen que el problema de la construcción de modelos para seguir la evolución del colapso gravitacional de objetos compactos se halle lejos de resolverse.

La intención de este capítulo ha sido la de explorar las consecuencias sobre la hidrodinámica descrita en las ecuaciones de Einstein cuando se introduce una **EENL**. El tratamiento al problema ha sido primeramente analítico y luego semi-numérico.

Se construyeron dos modelos de colapso analítico tomando como punto de partida dos soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein. El primer modelo fue construido a partir

de una solución de la familia Tolman VII propuesta por M. K. Gokhroo y A. L. Mehra [66]. El segundo está inspirado en la solución para fluido perfecto de Finch y Skea [69]. Los modelos tienen masas iniciales diferentes pero radían la misma cantidad de masa durante el proceso de colapso: 0,01 masas solares; y se corresponden con objetos cuyos radios iniciales son de 10,0 Km con el potencial en la superficie constante.

Inicialmente el sistema es considerado en equilibrio, el proceso de colapso comienza cuando se introduce una perturbación en el sistema a través de un pulso de radiación, como condición de contorno. Este pulso es la simulación a la variación de la luminosidad de la estrella debido a que se induce una pérdida de masa, es decir, el sistema se convierte en una fuente que radía energía durante todo el colapso.

En la Figura 7.1 se puede apreciar la evolución de la superficie a medida que transcurre la coordenada temporal, ambos modelos llegan a una situación final de equilibrio. Los radios alcanzados, una vez concluido el colapso, son de aproximadamente 9,923 Km para el modelo (F-S) y 9,938 Km para el (G-M). El modelo (G-M), aparentemente, representa un fluido más incompresible que el fluido (F-S). La Figura 7.2 muestra cómo aumentan las densidades centrales a medida que el radio de la estrella se contrae, mientras que en la Figura 7.3 se representan las velocidades de las superficies para los dos modelos. El incremento de la densidad central hace que se produzca un aumento importante en la interacción de la radiación con la materia, la gran cantidad de neutrinos generados durante el colapso ocasionan que una buena cantidad de energía térmica sea transportada desde las zonas más interiores de la estrella a las regiones más exteriores. Este flujo de radiación “enfía” la materia produciendo un efecto de termalización en el sistema, llevando a la estrella a un nuevo estado de equilibrio.

Un conjunto completo de perfiles para las variables físicas, para ambos modelos, se puede apreciar en las figuras 7.4 y 7.5. Tanto el perfil de densidad como el de presión en las capas más internas de la estrella varían muy poco durante el proceso de contracción. Los rangos de densidad para estos modelos van desde una densidad central de aproximadamente $1,8 \times 10^{15}$ gr/cm³ a una densidad en la superficie de aproximadamente $5,9 \times 10^{14}$ gr/cm³, y es de esperarse que dentro de este rango de densidades ocurran los procesos más importantes en el interior de una estrella de neutrones: la absorción de neutrinos por parte de los neutrones y las colisiones de neutrinos con electrones. Se suele llamar a este régimen de interacción materia-radiación como régimen difusivo. Para un estudio detallado de la contribución de cada uno de los procesos que tienen que ver con el transporte de los neutrinos puede consultarse en el trabajo realizado por Bruenn [125], las diferentes herramientas para abordar una descripción detallada de los procesos de emisión y captura de neutrinos están más allá de los propósitos de este trabajo.

Una característica bastante notable es el hecho de que las capas exteriores se mueven a una velocidad mucho mayor que las interiores y que existen regiones dentro de la distribución donde el colapso es aproximadamente homólogo, es decir, del tipo donde la velocidad del material es proporcional al radio. Esta situación de colapso homólogo es tal vez más notable en el (G-M).

La presencia de un campo de radiación que se propaga por el medio puede ser observado en (c) de las figuras 7.4 y 7.5. Existen zonas en el interior con un mayor flujo de energía

y se puede notar que el modelo (G-M) muestra un flujo de radiación mucho mayor que el de (F-S), aproximadamente un 60 % más. Estas zonas con una densidad de flujo de energía máximo se presentan en las regiones más interiores para el caso (F-S). Resulta entonces que las capas externas, que se mueven a mayor velocidad, no necesariamente son las capas donde se produce un mayor flujo de radiación.

En cuanto a los modelos construidos utilizando el algoritmo semi-numérico HJR, se tiene que en la Figura 7.6 se puede apreciar la evolución de la superficie para el modelo de Gokhroo-Mehra con una **EENL** (Caso 1, figura (a)) y con el potencial en la superficie constante (Caso 2, figura (b)). Se puede notar que ninguno de los dos modelos tiende a retomar el equilibrio de manera asintótica. Los diferentes perfiles de las variables físicas (ρ , P_r , q , y ω/c) para tres tiempos de evolución diferentes son mostrados en las figuras 7.7 y 7.8. La Figura 7.8 muestra el caso con \mathcal{C} constante. Se puede apreciar que la densidad y presión tienden a ser constantes cuando el potencial gravitacional es constante. En las figuras (c) para ambos modelos se observa que existe un máximo en la densidad de flujo de energía en una zona que se encuentra alrededor de $r = 5,5$ Km del centro de la distribución. El modelo con \mathcal{C} constante radía mucho menos energía que el modelo sin esta restricción.

Por otro lado, para los dos modelos presentado aquí, las capas que se encuentran en la zona próxima a $r = 9,2$ Km se mueven a una velocidad mucho mayor que el resto de la distribución. Sin embargo, el modelo con \mathcal{C} constante presenta velocidades de colapso menores en comparación al modelo completo, aproximadamente un 15 % menos. Ambos modelos se apartan considerablemente del régimen de colapso homólogo que aparece en los modelos analíticos.

Es de esperarse que el modelo (G-M) y el Caso 2 del modelo semi-numérico presenten algunas características en común, los dos modelos se corresponden a la misma ecuación de estado con el ingrediente adicional de que el potencial gravitacional en la superficie es constante. El hecho de que la descripción del colapso se desarrolla utilizando dos sistemas de coordenadas diferentes, el (G-M) en coordenadas de Schwarzschild y el modelo semi-numérico en coordenadas nulas tipo Bondi, implica la posibilidad de poder determinar algunos efectos que tienen que ver directamente con el hecho del cambio de coordenadas, uno de estos efectos es que el colapso en (G-M) tiende a estabilizarse, algo que no ocurre en el Caso 2 del modelo HJR. En cuanto a los rasgos en común se puede apreciar en las figuras 7.4 y 7.8 la presencia de zonas en el interior donde la densidad de flujo de energía y la velocidad del material son máximas. En ambos modelos los perfiles de densidad de energía y presión prácticamente no cambian durante el colapso.

Los dos esquemas presentados aquí parecen equivalentes en el sentido de que ambos parten de la idea de “dinamizar”, por argumentos heurísticos, una solución estática conocida de las ecuaciones de Einstein. En el caso del método HJR, la solución “semilla” se utiliza como función fuente para definir dos funciones auxiliares: la densidad efectiva $\tilde{\rho}$ y la presión efectiva \tilde{P} . Las variables efectivas coinciden con la densidad de energía y la presión radial en el límite estático. Esta suposición se puede respaldar en términos de los tiempos característicos para los diferentes procesos involucrados durante el colapso gravitacional de objetos compactos [6], [67], [126].

Este par de definiciones son tal vez el punto más crítico del método HJR, pero permiten,

por un lado, la posibilidad de obtener mediante un proceso de integración algebraica las dos funciones métricas, y por el otro lado, conducen a la posibilidad de construir, sobre la superficie, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que debe ser integrado numéricamente, bajo un conjunto de condiciones iniciales y de frontera. Sin embargo, todas estas consideraciones no permiten cerrar completamente el sistema representado por las ecuaciones de campo, y resulta necesario introducir una consideración adicional, que va a depender de la configuración estática, pero que en todo caso se reduce a dar una expresión para la cantidad $P_{\perp} - P$, o imponer el colapso homólogo: $\omega \propto r$.

Una vez que se define la forma que va a tener la función densidad de energía, a partir de la solución estática, la imposición de la ecuación de estado no local conduce a cerrar el conjunto de ecuaciones para seguir la evolución del sistema. Además, la dinámica del colapso viene estipulada en función de la coordenada temporal de Schwarzschild, lo cual puede resultar más interesante para los astrofísicos, y no en función del tiempo retardado de Bondi. No son muchas las soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein que describan procesos de colapso gravitacional con radiación, y como la única métrica, con simetría esférica, que tiene asociado un tensor de energía-impulso para radiación pura es la de Vaidya, existe la tendencia a desarrollar los esquemas de colapso gravitacional siempre en función de las coordenadas de radiación, con muy pocas conversiones a las coordenadas de Schwarzschild. Sin embargo, una conversión del método HJR a las coordenadas de Schwarzschild puede verse en [127].

Para finalizar, se consideró la posibilidad de encontrar una familia de métricas que acepten un campo vectorial de Killing conforme. La condición de no localidad impuesta sobre los elementos métricos permitió que fuese posible integrar las ecuaciones de colineación para obtener estas familias de métricas. Las soluciones dinámicas, anisótropas y no locales que admiten este tipo particular de colineación se acoplan continuamente en la frontera con la solución exterior de Vaidya y satisfacen las condiciones de energía, pero no son regulares en el centro. La no regularidad en el centro algunas veces puede ser solventada acoplando con una solución que represente un núcleo regular en el origen.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se demostró que es posible obtener modelos para configuraciones de materia extremadamente compacta que obedecen a ecuación de estado no local. Estos modelos analíticos, de fluido no perfecto y con simetría esférica, resultaron ser físicamente aceptables. La plausibilidad física de los modelos no locales considerados aquí, tanto para los casos estáticos como dinámicos, fue evaluada llevando a cabo un estudio de las condiciones de energía, algunas condiciones de aceptabilidad física y la posibilidad de acoplar de manera continua las soluciones obtenidas con las soluciones exteriores correspondientes.

La suposición principal de que la materia viene descrita por la siguiente ecuación de estado

$$P(t, r) = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \left[\frac{\rho + 2q\omega + P\omega^2}{1 - \omega^2} \right] d\bar{r},$$

se traduce en una ecuación de ligadura para las dos funciones libres que aparecen en el elemento métrico

$$\nu(t, r) = \lambda(t, r) + \kappa(t),$$

donde $\kappa(t)$ es una función relacionada, vía las ecuaciones de acoplamiento, al potencial gravitacional en la superficie

$$e^\kappa = 1 - \frac{2M(t)}{R(t)}.$$

La función masa para los modelos no locales queda automáticamente determinada por

$$m(t, r) = 2\pi r^3(\rho - P).$$

Por otro lado, los modelos no locales tienen la característica importante de ser regulares en el centro de simetría, donde se cumple la siguiente relación entre la densidad central ρ_c y la presión radial central P_c .

$$\rho_c = 3P_c.$$

A continuación consideraremos los siguientes puntos con el fin de hacer un resumen general de las conclusiones más importantes de este trabajo

1. Se ha propuesto un método para generar soluciones estáticas no locales, anisótropas, regulares en el centro a partir de tomar soluciones conocidas de las ecuaciones de

Einstein. Se consideraron 5 ejemplos para estudiar la factibilidad del método propuesto ajustando el conjunto de parámetros libres para representar objetos compactos de 10 Km. También fueron consideradas estrellas exóticas debido a la presencia de campos magnéticos intensos (magnetoestrellas), en este caso la ecuación de estado no es regular en el centro y por lo tanto no resulta ser viable para describir el núcleo de la estrella.

2. Cuando se introduce una nueva condición, en este caso la del tensor de Weyl igual a cero, el sistema de ecuaciones de campo queda completamente determinado. La solución estática así obtenida se corresponde a un objeto de 10 Km de radio y de masa total de 2,68 masas solares y se puede considerar como una estrella compacta con una densidad central de $2,14 \times 10^{15} \text{ gr cm}^{-3}$.
3. La teoría lagrangeana de campos nos provee de una herramienta para generar ecuaciones de estado para materia nuclear físicamente aceptables. Los modelos obtenidos utilizando este enfoque toman en cuenta los constituyentes esenciales de la materia, considera los campos de interacción entre partículas elementales y tiene el ingrediente adicional de ser una teoría relativista. En esta teoría las ecuaciones de estado no se obtienen resolviendo la ecuación de equilibrio hidrostático (ecuaciones TOV) sino resolviendo numéricamente un conjunto muy complejo de ecuaciones acopladas para potenciales químicos, momentos de Fermi, campos de mesones y un conjunto bastante considerable de incógnitas que tienen que ver con los tipos de bariones pertenecientes a la teoría.

En este trabajo se propuso un algoritmo para incorporar estas soluciones numéricas y producir soluciones no locales analíticas, es decir, considerar la viabilidad de heredar algunas características de los modelos de la teoría de partículas. Para tal fin se tomaron dos perfiles de densidad numéricas de la literatura y se extendió el método utilizado anteriormente para obtener soluciones estáticas. El resultado de aplicar el algoritmo resultó ser exitoso en el sentido de que se satisfacen las condiciones de energía y causalidad abriendo la posibilidad de desarrollar un estudio posterior con mejores técnicas numéricas y con ecuaciones de estado con una mejor resolución en los datos.

4. Fue posible construir un método para obtener N familias de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein: dada una familia infinita de funciones para la métrica $\nu(r)$, la condición de fluido perfecto puede ser integrada para obtener una familia infinita de funciones $m(r)$. Esto es debido al hecho de que la condición de fluido perfecto, para el caso estático y simetría esférica, resulta ser una ecuación diferencial lineal de primer orden para la función masa. La función $\nu(r)$ debe ser monótona creciente con un mínimo regular en $r = 0$, para garantizar que las cantidades invariantes del tensor de Riemann también sean regulares en el centro de simetría. Si adicionalmente se impone una nueva condición, como la condición no local, entonces el sistema de ecuaciones de campo queda completamente determinado, salvo algunas constantes que pueden ser halladas posteriormente a partir de las condiciones de acoplamiento.

Por lo tanto, a partir del hecho de suministrar la forma de una de las funciones de la métrica, es posible generar N soluciones para fluidos no perfectos que obedecen a

una ecuación de estado no local. Los diferentes valores de N determinan soluciones no locales con características completamente diferentes. Se estudió la viabilidad del método propuesto considerando, en primer lugar, una función fuente inspirada en la solución estática de Tolman IV. En segundo lugar, se estudiaron dos casos posibles incorporando, adicionalmente, la condición de que el tensor de Weyl sea cero. Los parámetros se ajustaron para que los diferentes modelos representen objetos compactos de 10 Km de radio, todos los 9 modelos considerados aquí tienen masas límites menores a 3,4 masas solares.

El punto crítico del método se encuentra en la posibilidad de resolver analíticamente la ecuación algebraica que resulta de la condición de borde $P(R) = 0$ para los diferentes valores que pueda tomar el parámetro N , pero en el peor de los casos una solución numérica siempre puede ser encontrada.

5. Para algunos tipos particulares de perturbaciones, la razón para las fluctuaciones de anisotropía y densidad $\delta\Delta/\delta\rho$ se pueden interpretar y acotar en términos de la diferencia de las velocidades del sonido $\delta\Delta/\delta\rho \sim v_{s\perp}^2 - v_s^2$. Se tiene que las regiones donde $v_s^2 < v_{s\perp}^2$ serán regiones potencialmente inestables, en caso contrario, si $v_s^2 \geq v_{s\perp}^2$ entonces no ocurrirán fracturas y la región será una región potencialmente estable. Esta interpretación permite hacer una redefinición del concepto de fractura al relacionar la fractura con regiones de inestabilidad debido al comportamiento de alguna de las variables físicas dentro de la configuración de materia, ya que la diferencia en las velocidades del sonido claramente permite identificar las regiones que tienden a ser inestables.
6. Con la ayuda de algunos argumentos heurísticos físicamente aceptables fue posible construir un par de modelos analíticos de colapso gravitacional para objetos compactos. Para la construcción de éstos fue necesario suministrar una ecuación de estado para una mezcla de materia y radiación: una ecuación de estado no local tomando como punto de partida una solución estática conocida de las ecuaciones de Einstein. En este sentido, lo que se quiere decir es que se toma un perfil de densidad, conocido como un “perfil de densidad semilla”, para luego introducir *ad hoc* la dependencia temporal a través de un conjunto de funciones que serán determinadas vía las ecuaciones de acoplamiento. Los dos ejemplos considerados aquí conducen a situaciones de colapso con el potencial gravitacional en la superficie constante.

Es posible establecer algunas comparaciones entre estos modelos analíticos con modelos desarrollados utilizando una técnica diferente de cálculo y en un sistema de coordenadas diferentes a las de Schwarzschild, a pesar de que las configuraciones iniciales de los parámetros no son exactamente las mismas para ambos modelos. Utilizando la misma “función semilla”, y el hecho de que el potencial gravitacional en la superficie se mantiene constante durante todo el colapso, se pudieron establecer algunas características que son independientes de las coordenadas como la aparición de zonas en el interior de la estrella donde existe un mayor flujo de energía.

7. Desde un punto de vista puramente matemático, la condición de no localidad impuesta

sobre el elemento métrico permite la posibilidad de integrar las ecuaciones de colineación para obtener familias de métricas que admiten un campo Vectorial de Killing Conforme. Las soluciones dinámicas, anisótropas y no locales que admiten este tipo particular de colineación resultaron ser soluciones que no son regulares en el origen.

Una aplicación reciente de la teoría no local expuesta en este trabajo puede verse en [35] y [128]. Allí se construyen diferentes modelos para objetos exóticos denominados mini-agujeros negros. El esquema de estudio para estos cuerpos se desarrolla dentro de lo que se conoce como la geometría no conmutativa de la gravedad cuántica. La geometría no conmutativa se basa en el hecho de la conmutación de las coordenadas $[x^\mu, x^\nu] = \theta^{\mu\nu}$, la cual se asume a tener una importancia relevante en los procesos físicos que se desarrollan a la escala de Plank.

En términos generales, suponer una ecuación de estado no local para describir un medio material altamente compacto, como son los objetos astrofísicos del tipo de estrellas de neutrones, tiene como implicación directa la posibilidad de reducir en buena medida el alto grado de complejidad que representa el conjunto completo de las ecuaciones de campo de la Relatividad General, sobre todo en el caso dependiente del tiempo. La hipótesis original de que el medio material responde a este tipo de ecuación de estado es, por un lado, una herramienta simplificadora para desarrollar la mayoría de los modelos desde un punto de vista completamente analítico, sin la necesidad de recurrir a técnicas numéricas de cálculo, y por el otro, es una descripción físicamente aceptable e interesante para estudiar y seguir la evolución de objetos compactos auto-gravitantes aislados.

Apéndice A

Soluciones Estáticas Exactas

En este apéndice se muestra un conjunto completo de figuras que complementa la información del Capítulo 4, sobre los diferentes ejemplos de soluciones exactas estáticas no locales.

Ejemplo 1

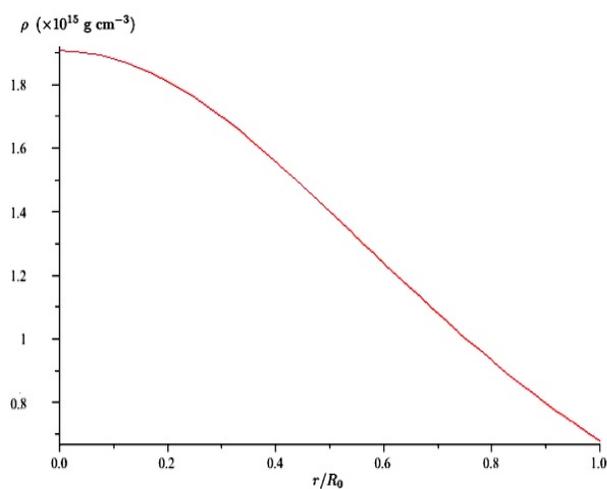


Figura A.1: Densidad de energía contra r para el modelo Stewart.

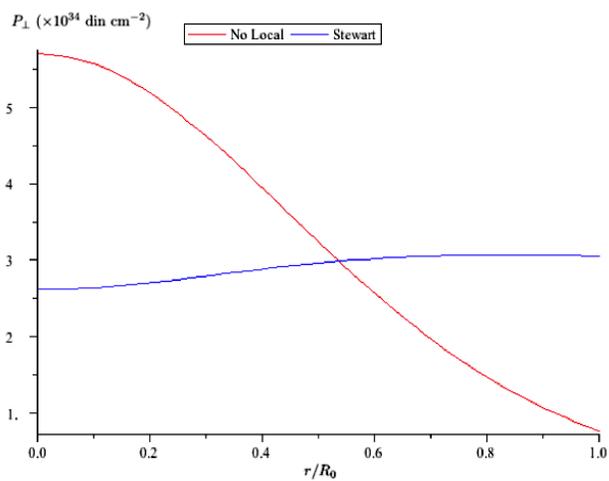


Figura A.2: Presión tangencial contra r : la solución original de Stewart (azul) y la solución no local (rojo).

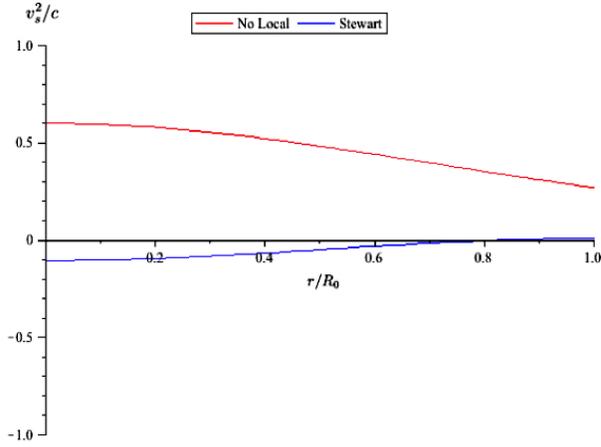


Figura A.3: Velocidad del sonido tangencial contra r : la solución original de Stewart (azul) y la solución no local (rojo).

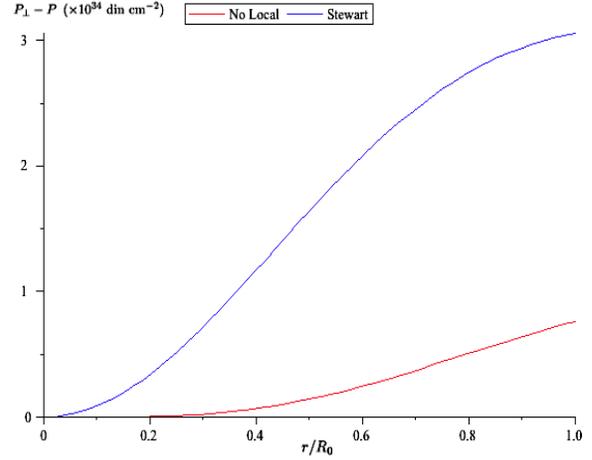


Figura A.4: Anisotropía contra r : la solución original de Stewart (azul) y la solución no local (rojo).

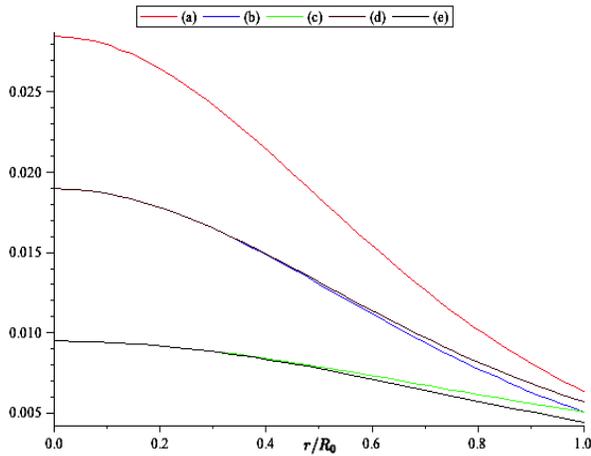


Figura A.5: Condiciones de energía para el modelo no local: (a) $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_{\perp} \geq 0$, (e) $\rho \geq P_{\perp}$.

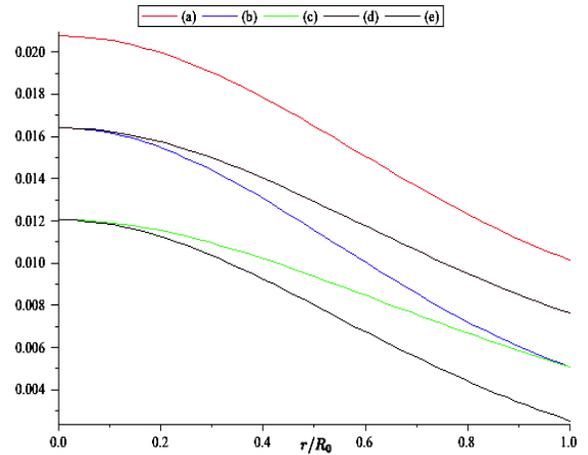


Figura A.6: Condiciones de energía para el modelo original de Stewart: (a) $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_{\perp} \geq 0$, (e) $\rho \geq P_{\perp}$.

Ejemplo 2

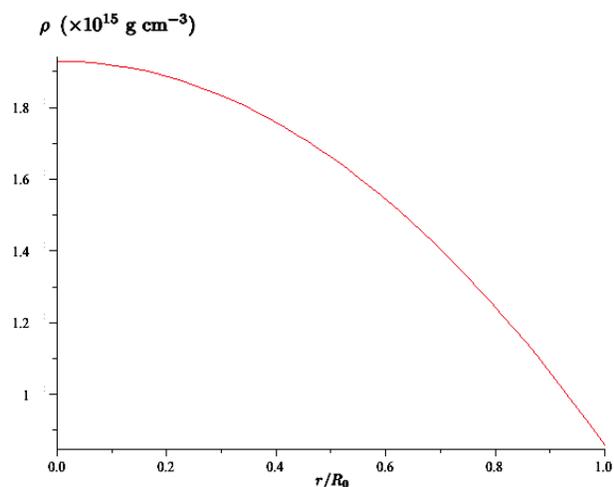


Figura A.7: Densidad de energía contra r para el modelo Gokhroo&Mehra. Ejemplo 2.

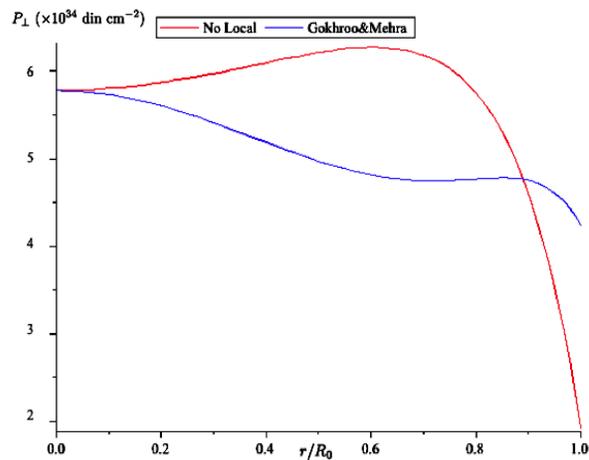


Figura A.8: Presión tangencial contra r : la solución original de Gokhroo&Mehra (azul) y la solución no local (rojo).

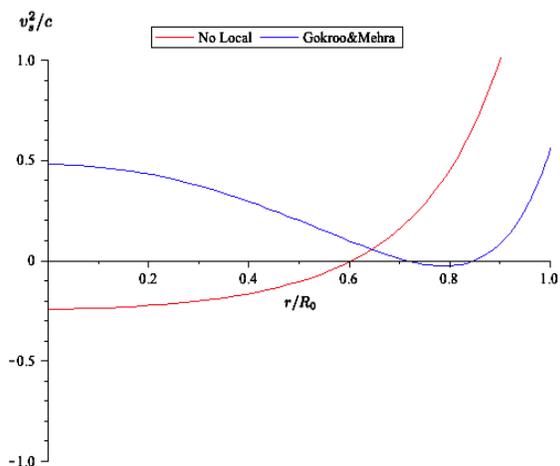


Figura A.9: Velocidad del sonido tangencial contra r : la solución original de Gokhroo&Mehra (azul) y la solución no local (rojo).

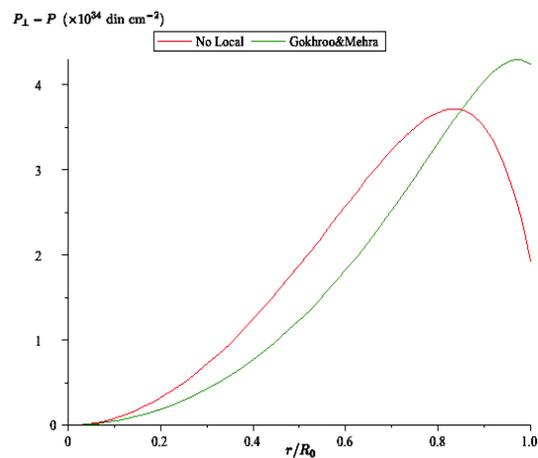


Figura A.10: Anisotropía contra r : la solución original de Gokhroo&Mehra (verde) y la solución no local (rojo).

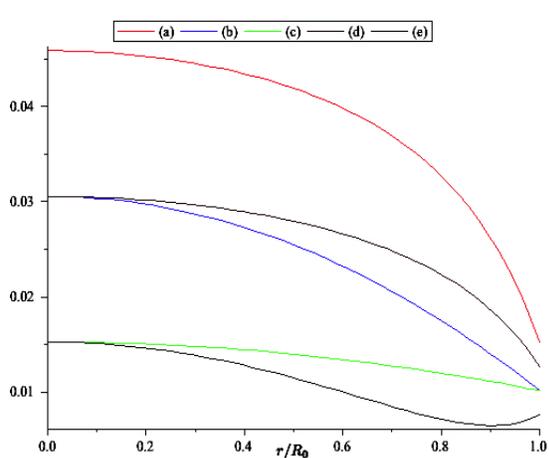


Figura A.11: Condiciones de energía para el modelo no local: (a) $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_{\perp} \geq 0$, (e) $\rho \geq P_{\perp}$.

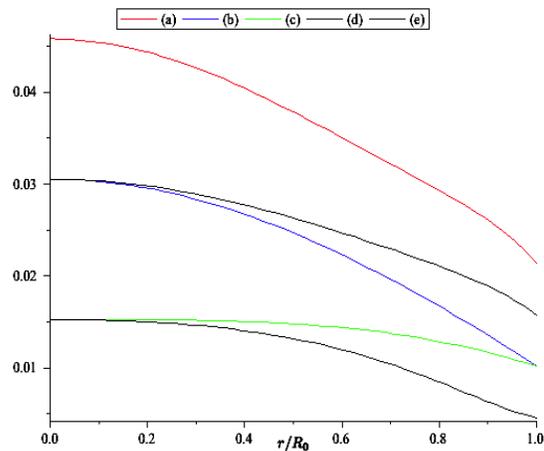


Figura A.12: Condiciones de energía para el modelo original de Gokhroo&Mehra: (a) $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_{\perp} \geq 0$, (e) $\rho \geq P_{\perp}$.

Ejemplo 3

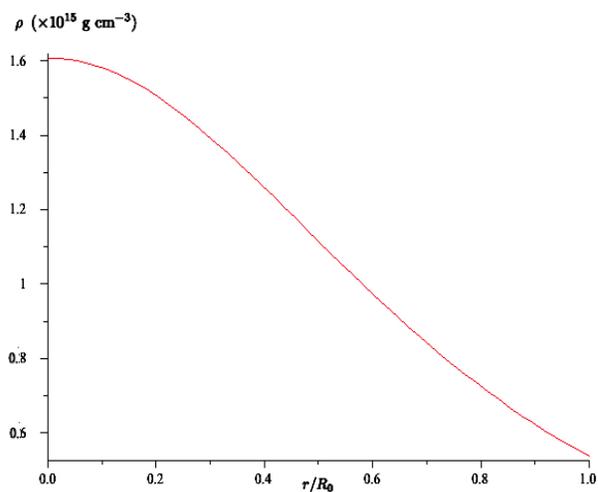


Figura A.13: Densidad de energía contra r para el modelo Finch&Skea. Ejemplo 3.

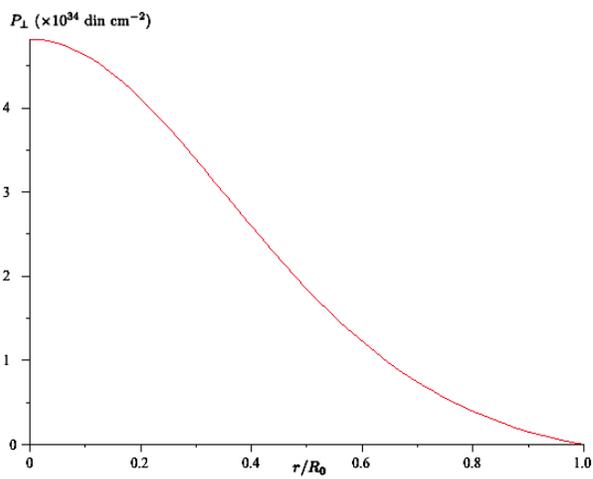


Figura A.14: Presión tangencial contra r para la solución no local tipo Finch&Skea.

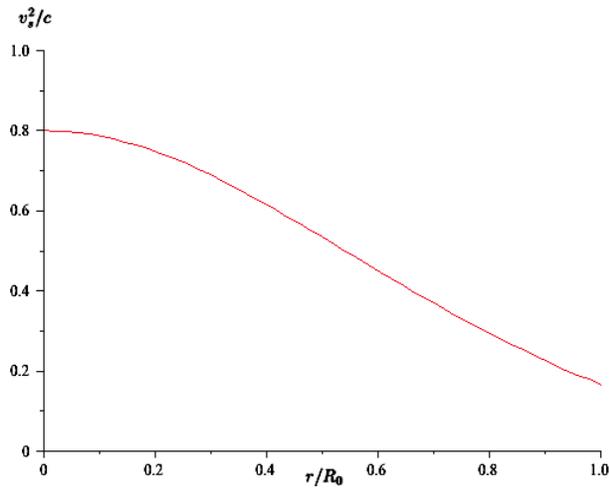


Figura A.15: Velocidad del sonido tangencial contra r para la solución no local tipo Finch&Skea.

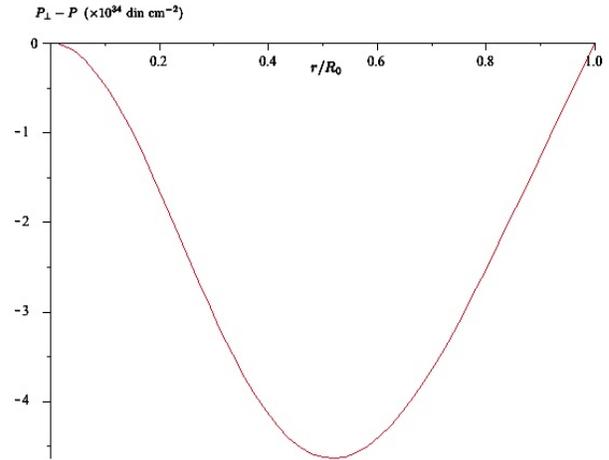


Figura A.16: Anisotropía contra r para la solución no local tipo Finch&Skea.

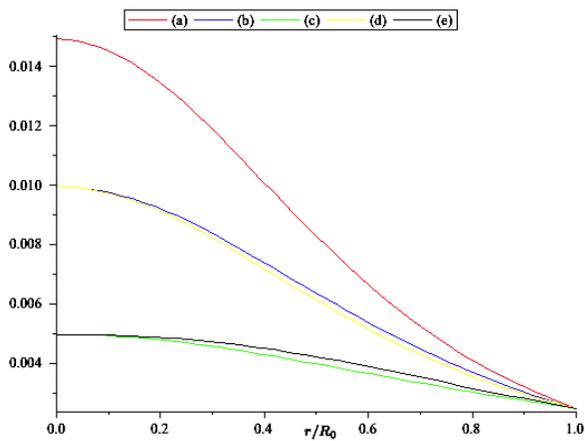


Figura A.17: Condiciones de energía para el modelo no local: (a) $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_{\perp} \geq 0$, (e) $\rho \geq P_{\perp}$.

Ejemplo 4

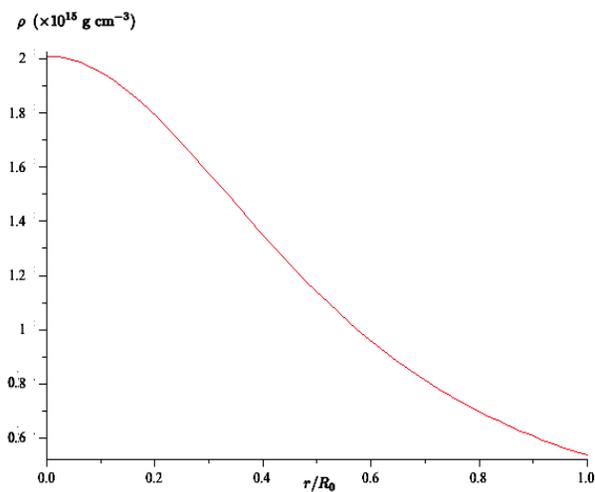


Figura A.18: Densidad de energía contra r para el modelo Durgapal ($n=1$). Ejemplo 4.

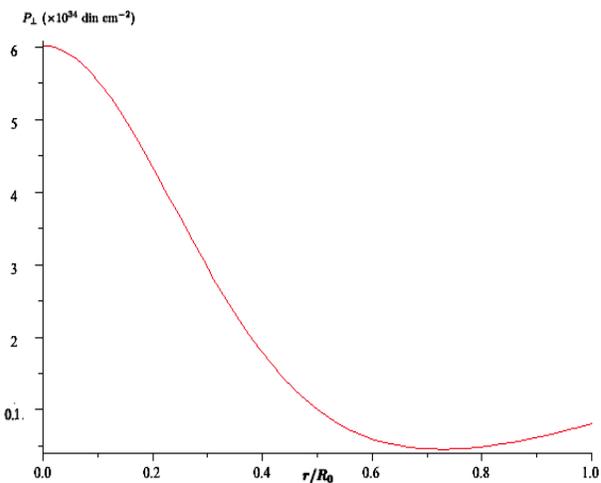


Figura A.19: Presión tangencial contra r para la solución no local tipo Durgapal ($n=1$).

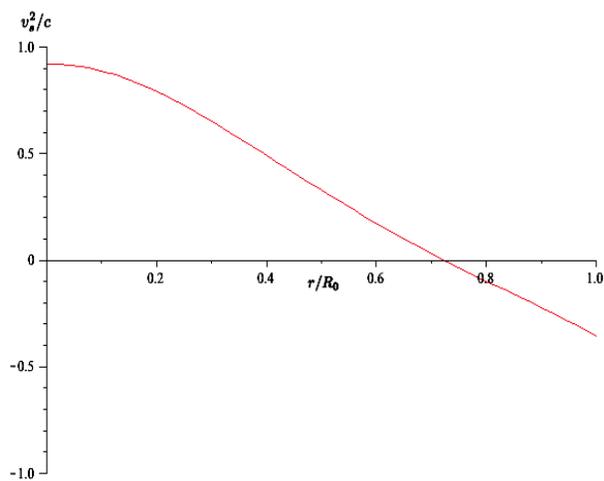


Figura A.20: Velocidad del sonido tangencial contra r para la solución no local tipo Durgapal ($n=1$).

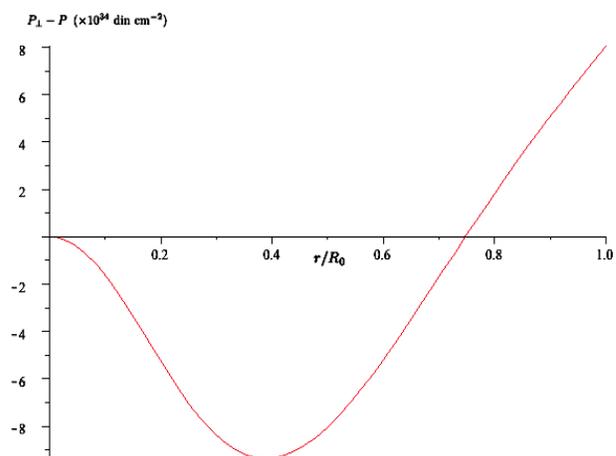


Figura A.21: Anisotropía contra r para la solución no local tipo Durgapal ($n=1$).

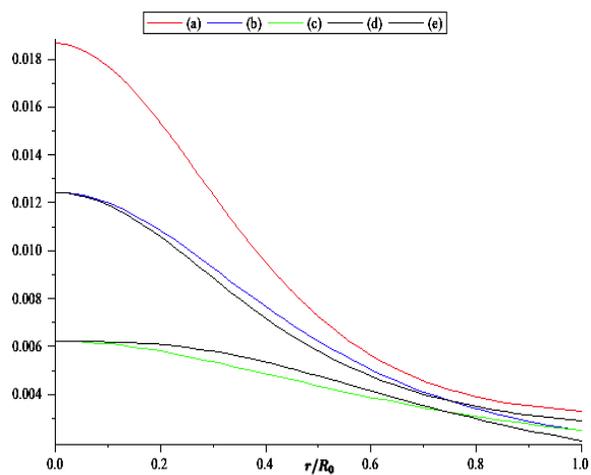


Figura A.22: Condiciones de energía para el modelo no local: (a) $\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_{\perp} \geq 0$, (e) $\rho \geq P_{\perp}$.

Ejemplo 5

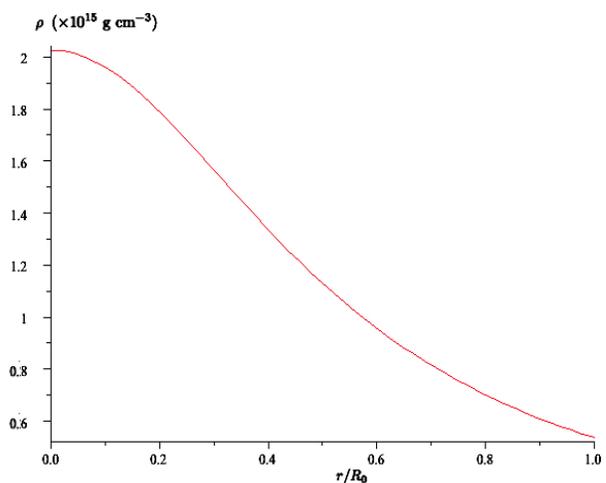


Figura A.23: Densidad de energía contra r para el modelo Durgapal ($n=2$). Ejemplo 5.

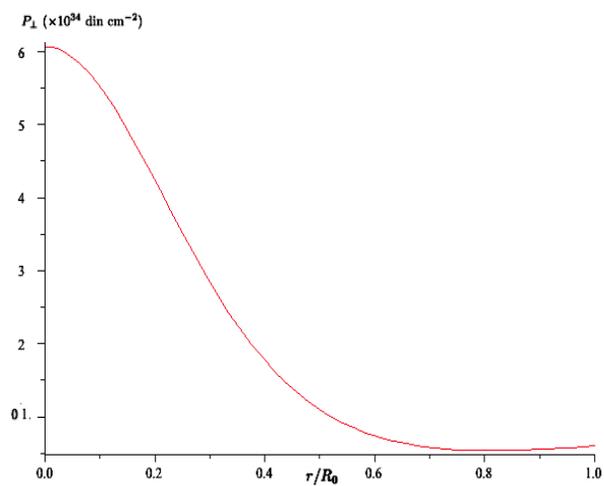


Figura A.24: Presión tangencial contra r para la solución no local tipo Durgapal ($n=2$).

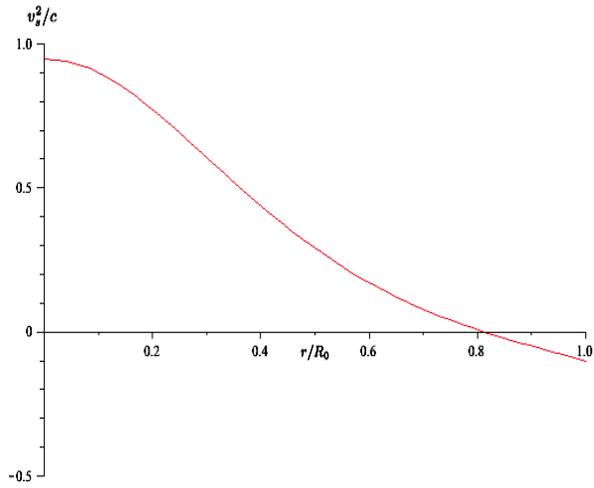


Figura A.25: Velocidad del sonido tangencial contra r para la solución no local tipo Durgapal ($n=2$).

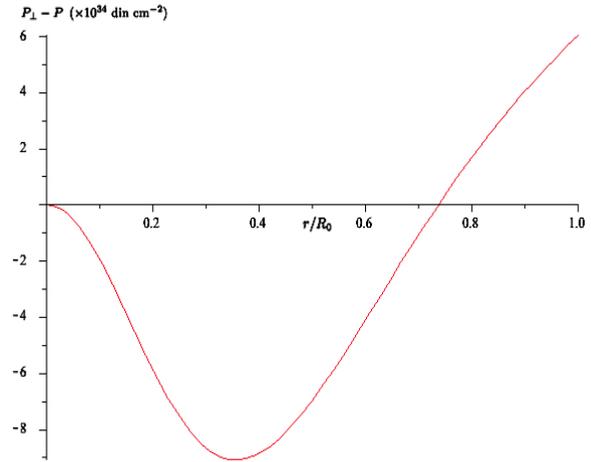


Figura A.26: Anisotropía contra r para la solución no local tipo Durgapal ($n=2$).

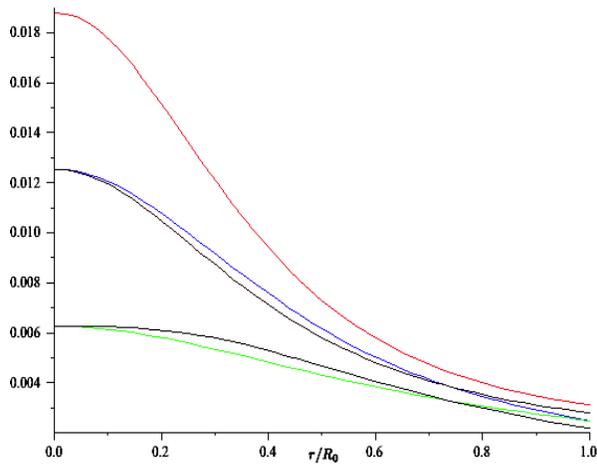


Figura A.27: Condiciones de energía para el modelo no local: (a) $\rho + P + 2P_\perp \geq 0$, (b) $\rho + P \geq 0$, (c) $\rho \geq P$, (d) $\rho + P_\perp \geq 0$, (e) $\rho \geq P_\perp$.

Apéndice B

Soluciones Estáticas Numéricas

Ecuación de estado: Caso 1 de [57]

| n fm ⁻³ | $\rho \times 10^{15}$ gr cm ⁻³ | $P \times 10^{35}$ dinas cm ⁻² | n fm ⁻³ | $\rho \times 10^{15}$ gr cm ⁻³ | $P \times 10^{35}$ dinas cm ⁻² |
|-------------------------|--|--|-------------------------|--|--|
| 1.08 | 2.3529 | 5.6382 | 0.66 | 1.2859 | 2.1251 |
| 1.06 | 2.2979 | 5.4459 | 0.64 | 1.2400 | 1.9915 |
| 1.04 | 2.2433 | 5.2575 | 0.62 | 1.1945 | 1.8630 |
| 1.02 | 2.1891 | 5.0725 | 0.60 | 1.1495 | 1.7396 |
| 1.00 | 2.1353 | 4.8907 | 0.58 | 1.1050 | 1.6212 |
| 0.98 | 2.0819 | 4.7120 | 0.56 | 1.0609 | 1.5076 |
| 0.96 | 2.0289 | 4.5353 | 0.54 | 1.0172 | 1.3989 |
| 0.94 | 1.9763 | 4.3594 | 0.52 | 0.97399 | 1.2948 |
| 0.92 | 1.9241 | 4.1855 | 0.50 | 0.93118 | 1.1952 |
| 0.90 | 1.8724 | 4.0135 | 0.48 | 0.88882 | 1.0998 |
| 0.88 | 1.8211 | 3.8384 | 0.46 | 0.84689 | 1.0082 |
| 0.86 | 1.7702 | 3.6644 | 0.44 | 0.80541 | 0.91960 |
| 0.84 | 1.7197 | 3.4950 | 0.42 | 0.76439 | 0.82933 |
| 0.80 | 1.6202 | 3.1683 | 0.40 | 0.72383 | 0.73893 |
| 0.78 | 1.5711 | 3.0111 | 0.38 | 0.68379 | 0.64505 |
| 0.76 | 1.5224 | 2.8572 | 0.36 | 0.64429 | 0.55793 |
| 0.74 | 1.4742 | 2.7065 | 0.34 | 0.60531 | 0.47866 |
| 0.72 | 1.4264 | 2.5570 | 0.32 | 0.56682 | 0.40714 |
| 0.70 | 1.3791 | 2.4078 | 0.30 | 0.52879 | 0.34314 |
| 0.68 | 1.3323 | 2.2638 | 0.28 | 0.49122 | 0.28650 |

Tabla 1

Ecuación de estado: Caso 2 de [57]

| n | $\rho \times 10^{15}$ | $P \times 10^{35}$ | n | $\rho \times 10^{15}$ | $P \times 10^{35}$ |
|------------------|-----------------------|------------------------|------------------|-----------------------|------------------------|
| fm ⁻³ | gr cm ⁻³ | dinas cm ⁻² | fm ⁻³ | gr cm ⁻³ | dinas cm ⁻² |
| 1.08 | 2.3529 | 5.6382 | 0.66 | 1.2859 | 2.1251 |
| 1.06 | 2.2979 | 5.4459 | 0.64 | 1.2400 | 1.9915 |
| 1.04 | 2.2433 | 5.2575 | 0.62 | 1.1945 | 1.8630 |
| 1.02 | 2.1891 | 5.0725 | 0.60 | 1.1495 | 1.7396 |
| 1.00 | 2.1353 | 4.8907 | 0.58 | 1.1050 | 1.6212 |
| 0.98 | 2.0819 | 4.7120 | 0.56 | 1.0609 | 1.5076 |
| 0.96 | 2.0289 | 4.5353 | 0.54 | 1.0172 | 1.3989 |
| 0.94 | 1.9763 | 4.3594 | 0.52 | 0.97399 | 1.2948 |
| 0.92 | 1.9241 | 4.1855 | 0.50 | 0.93118 | 1.1952 |
| 0.90 | 1.8724 | 4.0135 | 0.48 | 0.88882 | 1.0998 |
| 0.88 | 1.8211 | 3.8384 | 0.46 | 0.84689 | 1.0082 |
| 0.86 | 1.7702 | 3.6644 | 0.44 | 0.80541 | 0.91960 |
| 0.84 | 1.7197 | 3.4950 | 0.42 | 0.76439 | 0.82933 |
| 0.80 | 1.6202 | 3.1683 | 0.40 | 0.72383 | 0.73893 |
| 0.78 | 1.5711 | 3.0111 | 0.38 | 0.68379 | 0.64505 |
| 0.76 | 1.5224 | 2.8572 | 0.36 | 0.64429 | 0.55793 |
| 0.74 | 1.4742 | 2.7065 | 0.34 | 0.60531 | 0.47866 |
| 0.72 | 1.4264 | 2.5570 | 0.32 | 0.56682 | 0.40714 |
| 0.70 | 1.3791 | 2.4078 | 0.30 | 0.52879 | 0.34314 |
| 0.68 | 1.3323 | 2.2638 | 0.28 | 0.49122 | 0.28650 |

Tabla 2

Bibliografía

- [1] Narasimhan M. N. L. (1993)
Principles of Continuum Mechanics. (John Willey, New York)
- [2] Chandrasekhar S. (1950)
Radiative Transfer. (Oxford, Oxford University Press)
- [3] Demiański M. (1985)
Relativistic Astrophysics, in International Series in Natural Philosophy, Vol 110, Edited by *D. Ter Haar*. (Pergamon Press, Oxford)
- [4] Shapiro S. L. y Teukolsky S. A. (1983)
Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. (John Willey, New York)
- [5] Balberg S., Shapiro S. L. (2000)
The Properties of Matter in White Dwarfs and Neutron Stars, in Handbook of Elastic Properties, Edited by H.E. Bass, V.M. Keppens, M. Levy and R. Raspet. (Academic Press, New York)
<http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/0004317>
- [6] Kippenhahn R., Weigert A. (1990)
Stellar Structure and Evolution. (Springer Verlag, New York)
- [7] Glendenning N. K. (2000)
Compact Stars. (Springer Verlag, New York)
- [8] Heiselberg H., Pandharipande V. (2000)
Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50**, 481.
<http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/0003276>
- [9] Kälman G. (1974)
9 Phys. Rev. D, **9**, 1656.
- [10] Walecka D. (1974)
Ann. Phys., **83**, 491.
- [11] Hernández H., Núñez L. A., Percoco U. (1999)
Class. Quantum Grav., **16**, 871.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9806029>

- [12] Hernández H., Núñez L. A. (2004)
Can. J. Phys., **82**, 29-51.
- [13] Jeans J. H. (1922)
Mon. Not. R Astron. Soc., **82**, 122.
- [14] Lemaître G. (1933)
Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **A53**, 51.
- [15] Bower R., Liang E. P. (1974)
Astrophys. J., **188**, 657.
- [16] Herrera, L., Santos, N.O. (1997)
Physics Reports, **286**, 53.
- [17] Suh I-S., Mathews G. J. (1999)
Nuclear Equation of State and Internal Structure of Magnetars, in Proceedings of the 5th Huntsville Gamma Ray Burst Symposium, Huntsville, Alabama, USA, Oct. 18-22.
- [18] Chaichian M., Masood S. S., Montonen C., Perez-Martínez A., Pérez-Rojas H. (2000)
Phys. Rev. Lett., **84**, 5261.
<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/9911218>
- [19] Suh I-S., Mathews G. J. (2001)
Astrophys. J., **546**, 1126.
<http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/9912301>
- [20] Kohri, K., Yamada, S., Nagataki, S. (2001)
<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/0106271>
- [21] Pérez Martínez A., Pérez Rojas H., Mosquera H. (2000)
<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/0011399>
- [22] Herrera L. (1992)
Physics Letters A., **165**, 206-210.
- [23] DiPrisco A., Fuenmayor E., Herrera L., Varela V. (1992)
Physics Letters A., **195**, 23-26.
- [24] DiPrisco A., Herrera L., Varela V. (1997)
Gen. Rel. Grav., **29**, 1239-1256.
- [25] Hall G. S. (1988)
Gen. Rel. Grav., **20**, 399.
- [26] Hall G. S., da Costa J. (1988)
J. Math. Phys., **29**, 2465.

- [27] Geroch R. P. (1969)
Comm. Math. Phys., **13**, 180.
- [28] Hall G. S. (1990)
Gen. Rel. Grav., **22**, 203.
- [29] Tupper B. O. J., Keane A. J., Hall G. S., Carot J. (2003)
Class. Quantum Grav., **20**, 801.
- [30] Maartens R., Mason D. P., Tsamparlis M. (1986)
J. Math. Phys., **27**, 2987.
- [31] Coley A. A., Tupper B. O. J. (1989)
J. Math. Phys., **30**, 2616.
- [32] Coley A. A., Tupper B. O. J. (1990)
Class. Quantum Grav., **7**, 1961.
- [33] Coley A. A., Tupper B. O. J. (1992)
Class. Quantum Grav., **7**, 2195.
- [34] Coley A. A., Czapor S. R. (1992)
Class. Quantum Grav., **9**, 1787.
- [35] Arraut I., Batic D., Nowakowski M. (2009)
<http://xxx.lanl.gov/abs/0902.3481>
- [36] Wald R. M. (1984)
General Relativity, (University of Chicago Press).
- [37] Cahill M. E., McVittie G. C. (1970)
J. Math. Phys., **11**, 1382.
- [38] Hernández W. C., Misner C. W. (1966)
Astrophys. J., **143**, 452.
- [39] Buchdahl H. A. (1959)
Phys. Rev., **116**, 1027.
- [40] Darmois G. (1927)
Memorial des Sciences Mathématiques (Gauthier-Villars, Paris), Fasc. 25.
- [41] Vaidya P. C. (1951)
Proc. Ind. Acad. Sci. Set. A, **33**, 264.
- [42] Herrera L., Núñez L. A. (1990)
Fund. Cosmic Phys., **14**, 235.

- [43] Bonnor W. B., De Oliveira A. K. G., Santos N. O. (1989)
Physics Reports, **181**, 269.
- [44] Herrera L. (1996)
Notas de la II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica: Campos gravitacionales en la materia. Editado por Rago H. Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela.
- [45] Kolassis C. A., Santos O. N., Tsoubelis D. (1988)
Class. Quantum Grav., **5**, 1329.
- [46] Katzin G. H., Levine J., Davis W. R. (1969)
J. Math. Phys., **10**, 617.
- [47] Weinberg S. (1972)
Gravitation and Cosmology (John Willey & Sons, New York).
- [48] Papapetrou A. (1974)
Lectures on General Relativity (D. Reidel Publishing Company, Holland).
- [49] Mason D.P., Tsamparlis M. (1985)
J. Math. Phys., **26**, 2881.
- [50] Maartens R., Mason D.P., Tsamparlis M. (1986)
J. Math. Phys., **27**, 2987.
- [51] Herrera L., Jiménez J., Leal L., Ponce de Leon J., Esculpi M., Galina V. (1984)
J. Math. Phys., **25**, 3274.
- [52] Herrera L., Ponce de Leon J. (1985)
J. Math. Phys., **26**, 778.
- [53] Herrera L., Ponce de Leon J. (1985)
J. Math. Phys., **26**, 2018.
- [54] Herrera L., Ponce de Leon J. (1985)
J. Math. Phys., **26**, 2302.
- [55] Carot J. (1991)
Notas de clases.
- [56] Baym G., Pethick C., Sutherland P. (1971)
Astrophys. J., **170**, 299.
- [57] Glendenning N. K. (1985)
Astrophys. J., **293**, 470.
- [58] Rendall A. D., Schmidt B. G. (1991)
Class. Quantum Grav., **8**, 985.

- [59] Lake K. (2009)
<http://xxx.lanl.gov/abs/0905.3546>
- [60] Baumgarte T. W., Rendall A. D. (1993)
Class. Quantum Grav., **10**, 327.
- [61] Mars M., Mercè Martín-Prats M., Senovilla J. M. (1996)
Phys. Lett. A, **218**, 147.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0202003>
- [62] Finch M. R., Skea J. F. E. (1998)
A Review of the Relativistic Static Fluid Spheres.
<http://www.dft.if.uerj.br/usuarios/JimSkea/papers/pfrev.ps>
- [63] Delgaty, M. S. R., Lake, K. (1998)
Comput. Phys. Commun., **115**, 395.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9809013>
- [64] Stewart, B. W. (1982)
J. Phys. A. Math. Gen., **15**, 2419.
- [65] Florides P. S. (1974)
Proc. Roy. Soc. Lond., **A337**, 529.
- [66] Gokhroo M. K., Mehra A. L. (1994)
Gen. Rel. Grav., **26**, 75.
- [67] Martínez J. (1996)
Phys. Rev. D, **53**, 6921.
- [68] Bethe H. A., Börner G., Sato K. (1970)
Astr. and Ap., **7**, 279.
- [69] Finch M. R., Skea J. E. F. (1989)
Class. Quantum Grav., **6**, 467.
- [70] Durgapal M. C., Bannerji R. (1983)
Phys. Rev. D, **27**, 328.
- [71] Tolman R. C. (1939)
Phys. Rev., **55**, 364.
- [72] Korkina M. P. (1981)
Sov. Phys. J. **24**, 468.
- [73] Durgapal, M. C. (1982)
J. Phys. A. Math Gen., **15**, 2637.

- [74] Wyman M. (1949)
Phys. Rev., **75**, 1930.
- [75] Kuchowicz B. (1970)
Acta. Phys. Polon., **B1**, 437.
- [76] Adler R. J. (1974)
J. Math. Phys., **15**, 727.
(Erratum (1976), *J. Math. Phys.*, **17**, 158.
- [77] Adams R. C., Cohen J. M. (1975)
Astrophys. J., **198**, 507.
- [78] Einstein, A. (1939)
Ann. Math., **40**, 4, 922.
- [79] Datta B. K. (1970)
Gen. Rel. Grav., **1**, 19.
- [80] Bondi H. (1971)
Gen. Rel. Grav., **2**, 321.
- [81] Evans A. (1977)
Gen. Rel. Grav., **8**, 155.
- [82] Magli G. (1997)
Class. Quantum Grav., **14**, 1937.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9711082>
- [83] Harada T., Nakao K., Iguchi H. (1999)
Class. Quantum Grav., **16**, 2785.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9904073>
- [84] Jhingan S., Magli G. (2000)
Phys. Rev. D, **61**, 124006.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9902041>
- [85] Barve S., Singh T., Witten L. (2000)
Gen. Rel. Grav., **32**, 697.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9901080>
- [86] Herrera L., Di Prisco A., Ospino J., Fuenmayor, E. (2001)
J. Math. Phys., **42**, 2129.
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0102058>
- [87] Tolman R.C. (1930)
Phys. Rev., **35**, 875.

- [88] Whittaker E. T. (1935)
Proc. R. Soc. London, **A149**, 384.
- [89] Ishak M., Lake K. (2003)
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0304065>
- [90] Carot J., da Costa J. (1993)
Class. Quantum Grav., **10**, 461-482.
- [91] Lake K. (2003)
Phys. Rev. D, **67**, 104015.
- [92] Heintzmann H. (1969)
Z. Phys, **228**, 489.
- [93] Herrera L., J. Ospino, Di Prisco A. (2007)
<http://xxx.lanl.gov/abs/0712.0713>
- [94] Chan R., Herrera L., Santos N. O. (1993)
Mon. Not. R. Astron. Soc., **265**, 544-544.
- [95] Abreu H., Hernández H., Núñez L. A. (2007)
Class. Quantum Grav., **24**, 4631-4645.
- [96] Cosenza M., Herrera L., Esculpi M., Witten L., (1981)
J. Math. Phys., **22**, 118.
- [97] Chandrasekhar S. (1984)
Mod. Phys., **56**, 13747.
- [98] Dev K., Gleiser M. (2003)
Gen. Rel. Grav., **35**, 143557.
- [99] Herrera L., Jiménez J., Ruggeri G. J. (1980)
Phys. Rev. D, **22**, 2305.
- [100] Cosenza M., Herrera L., Esculpi M., Witten L. (1982)
Phys. Rev. D, **25**, 2527.
- [101] Herrera L., Jiménez J., Barreto W. (1989)
Canad. J. Phys, **67**, 855.
- [102] Barreto W., Rojas S. (1992)
Astrophys. and Space Sc., **193**, 201.
- [103] Martínez J., Pavón D., Núñez L. A. (1994)
Mon. Not. R. Astron. Soc., **271**, 463.

- [104] Aquilano R., Barreto W., Núñez L. A. (1994)
Gen. Rel. Grav., **26**, 537.
- [105] Herrera L., Melfo A., Núñez L. A., Patiño A. (1994)
Ap. J., **421**, 677.
- [106] Chan R., Herrera L., Pacheco J. A. F., Santos N. O. (1991)
Ap. J., **382**, 255.
- [107] Barreto W., Núñez W. (1991)
Astrophys. and Space Sc., **178**, 261.
- [108] Aguirre F., Hernández H., Núñez L. A. (1994)
Astrophys. and Space Sc., **219**, 153.
- [109] Tsamparlis, M., Pantelis S. Apostolopoulos (2000)
J. Math. Phys., **41**, 7573.
- [110] Contreras G., Núñez L. A., Percoco U. (2000)
Gen. Rel. Grav., **32**, 285.
- [111] Camci, U., Yavuz, I., Baysal, H., Tarhan, I., Yilmaz, I. (2001)
Mod. Phys. D, **10**, 751.
- [112] Bokhari, A. H., Kashif, A.R, Qadir A. (2000)
J. Math. Phys., **41**, 2167.
- [113] Qadir A., Ziad, M. (1998)
Nuovo Cimento, **B113**, 773.
- [114] Bokhari A. H., Qadir A., Ahmad M. S., Asghar M. (1997)
J. Math. Phys., **38**, 3639.
- [115] Bokhari A. H., Amir M. J., Qadir A. (1994)
J. Math. Phys., **35**, 3005.
- [116] Melfo A., Núñez L. A., Percoco U., Villalba V. M. (1994)
J. Math. Phys., **33**, 2258.
- [117] Bokhari, A. H., Qadir, A. (1993)
J. Math. Phys., **34**, 3543.
- [118] Carot J., da Costa J. (1997)
Procs. of the 6th Canadian Conf. on General Relativity and Relativistic Astrophysics, Fields Inst. Commun. 15, Amer. Math. Soc. WC Providence. **R1**, 179.
- [119] Carot J., Núñez L.A., Percoco U. (1997)
Gen. Rel. Grav., **29**, 1223.

- [120] Davis, W. R., Katzin, G. H. (1962)
Am. J. Phys., **30**, 750.
- [121] Bokhari, A. H., Qadir, A. (1990)
J. Math. Phys., **31**, 1463.
- [122] Katzin, G. H., Levine J., Davis H. R. (1969)
J. Math. Phys., **10**, 617.
- [123] Lindblom L., (1992)
Phil. Trans. R. Soc. Lond. A., **340**, 353.
- [124] Apostolopoulos P. S., Tsampanlis M. (2001)
<http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0108064>
- [125] Bruenn S. W. (1985)
Ap. J. Supp., **58**, 771.
- [126] Burrows A., Lattimer J. M. (1986)
Astrophys. J., **307**, 178.
- [127] Barreto W., Rodríguez B., Martínez H. (2002)
Astrophys. and Space Sc., **282**, 581-593.
- [128] Nicolini P. (2009)
Int. J. Mod. Phys. A, **24**, 1229-1308.